

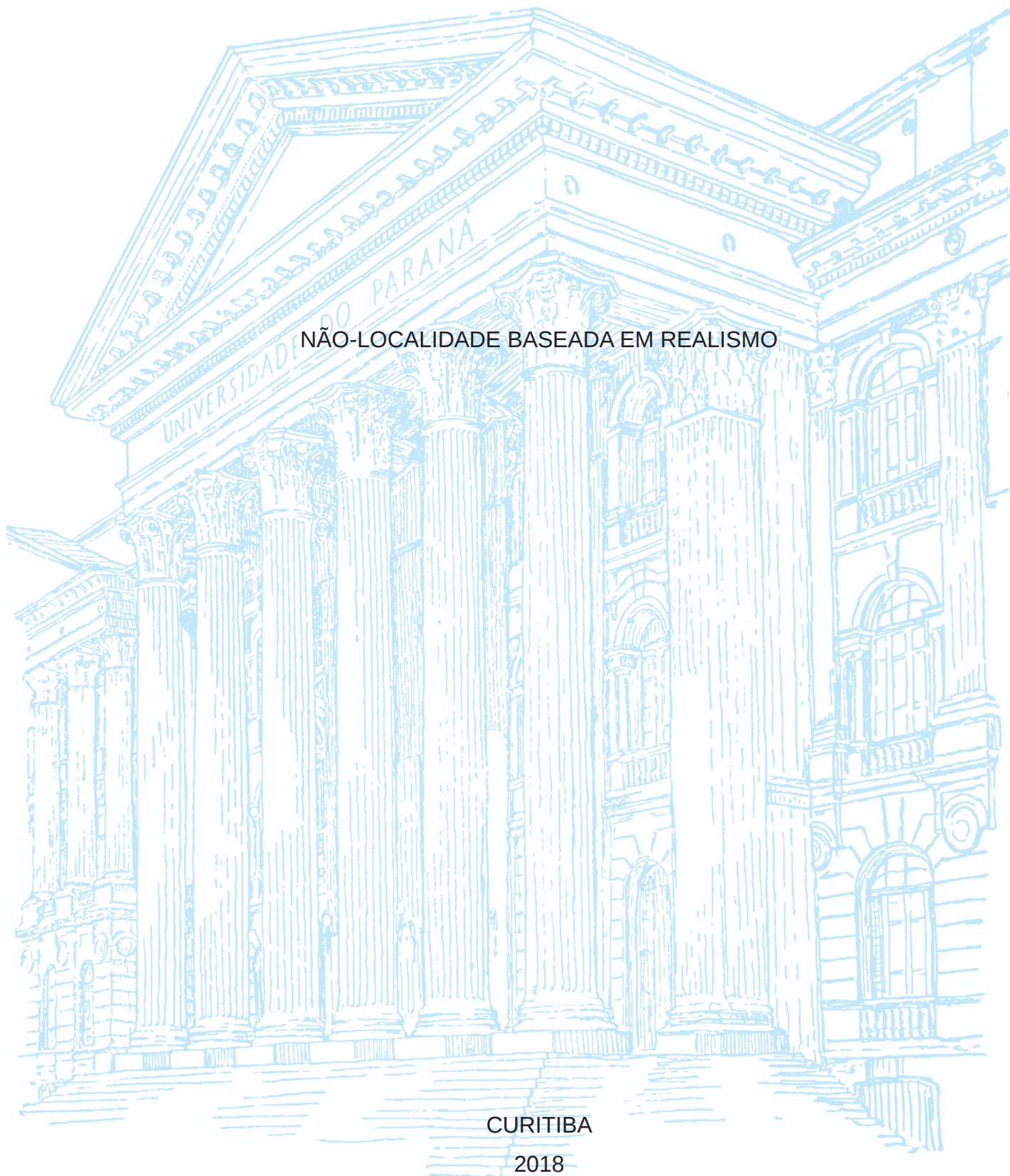
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

VALBER DA SILVA GOMES

NÃO-LOCALIDADE BASEADA EM REALISMO

CURITIBA

2018



VALBER DA SILVA GOMES

NÃO-LOCALIDADE BASEADA EM REALISMO

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Renato Moreira Angelo

CURITIBA

2018

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO SISTEMA DE BIBLIOTECAS/UFPR
BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

G633n

Gomes, Valber da Silva

Não-localidade baseada em realismo / Valber da Silva Gomes. – Curitiba, 2018.

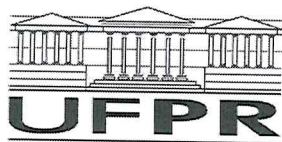
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2018.

Orientador: Prof. Dr. Renato Moreira Angelo.

1. Não localidade. 2. Entropia. 3. Quantificação. 4. Medições. I. Universidade Federal do Paraná. II. Angelo, Renato Moreira. III. Título.

CDD: 530.12

Bibliotecária: Romilda Santos - CRB-9/1214



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR CIÊNCIAS DE CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO FÍSICA

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **VALBER DA SILVA GOMES** intitulada: "**Não- localidade baseada em realismo**", após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 13 de Agosto de 2018.

RENATO MOREIRA ANGELO
Presidente da Banca Examinadora

FABIANO MANOEL DE ANDRADE
Avaliador Externo

RODRIGO ANDRE CAETANO
Avaliador Interno

MARCUS WERNER BEIMS
Avaliador Interno

FERNANDO ROBERTO DE LUNA PARÍSIO FILHO
Avaliador Externo

AGRADECIMENTOS

A Deus, em primeiro, por ter me dado saúde, força e determinação para superar os momentos de dificuldade;

Ao Prof. Renato Moreira Angelo pela orientação, paciência e apoio dado durante o doutorado;

Aos meus pais, Evaldo e Liduina, que sempre estiveram ao meu lado e me apoiaram durante essa caminhada;

A minha esposa, Ana Ryquelle, pela paciência e compreensão demonstradas durante o tempo em que estive dedicado ao doutorado;

À CAPES pelo suporte financeiro.

RESUMO

Neste trabalho, introduzimos um quantificador de não-localidade que é inspirado na noção de realidade proposta recentemente por Bilobran e Angelo, [Europhys. Lett. 112, 40005 (2015)]. Definimos, aqui, uma noção de não-localidade baseada em realismo (NBR) e um objeto capaz de quantificá-la em cenários de alterações de realidade para sistemas distantes. Através de estudos analíticos, verificamos seu desempenho quando comparado a outros quantificadores baseados na desigualdade CHSH. Provamos que nossa medida é não-crescente sob operações locais e não suscetível ao problema da anomalia de não-localidade, caso em que a máxima violação de uma desigualdade de Bell não é alcançada para um estado puro maximamente emaranhado. Em seguida, estendemos a abordagem ao regime de medições fracas com a utilização do conceito de monitoramento fraco. Apresentamos situações de medições fracas sendo conduzidas em um e em dois sítios de estados bipartidos com o propósito de avaliarmos o comportamento da NBR. Em seguida, estendemos a medida de irrealidade através de uma função entrópica generalizada, a partir da qual podemos obter a entropia de von Neumann, a entropia de Tsallis, entre outras, apenas ajustando parâmetros entrópicos. Por último, generalizamos a noção de NBR para um dado contexto objetivando analisar o comportamento de nosso quantificador e compará-lo com o procedimento de minimização da NBR de contexto. A maior parte do estudo é analiticamente conduzida para uma classe importante de estados de Werner de dois qubits, que é descrita em termos de um único parâmetro.

Palavras-chave: Não-localidade. Realismo. NBR. Entropia. Quantificação. Medições.

ABSTRACT

In this work, we introduce a non-locality quantifier that is inspired by the notion of reality recently proposed by Bilobran and Angelo, [Europhys. Lett. 112, 40005 (2015)]. We define here a notion of non-locality based on realism (NRB) and an object capable of quantifying scenarios of changes of reality for distant systems. Through analytical studies, we verify its performance when compared to other quantifiers based on CHSH inequality. We prove our measure is non-growing under local operations and not susceptible to the problem of nonlocality anomaly, in which case the maximum violation of a Bell inequality is not achieved for a purely entangled pure state. Next, we extend the approach to the regime of weak measurements using the concept of weak monitoring. We present situations of weak measurements being conducted in one and two sites of bipartite states in order to evaluate the behavior of NRB. Then, we extend a measure of unreality through a generalized dash function, from which we can obtain the von Neumann entropy, the Tsallis entropy, among others, by simply fitting entropic parameters. Finally, we generalize a notion of NRB for a given context aiming to analyze the behavior of our quantifier and compare it with the procedure of minimization of the context NRB. Most of the study is conducted for an important class of two qubits Werner states, which is described in terms of a single parameter.

Key-words: Non-locality. Realism. NBR. Entropy. Quantification. Measurements.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	23
2.1	FORMALISMO QUÂNTICO	23
2.1.1	Problema da medição	26
2.2	MEDIÇÕES FRACAS	28
2.3	ENTROPIA QUÂNTICA	30
2.3.1	Entropia de von Neumann	31
2.3.2	Entropia linear	32
2.3.3	Entropia de Rényi	33
2.3.4	Entropia de Tsallis	34
2.3.5	Entropia generalizada quântica	34
2.3.6	Entropia e informação	35
2.4	SISTEMAS QUÂNTICOS ABERTOS	37
2.4.1	Representação do operador-soma	38
2.4.2	Canais de ruído quântico	39
2.5	CORRELAÇÕES QUÂNTICAS	41
2.5.1	Emaranhamento	46
2.5.2	Direcionamento EPR	48
2.5.3	Discórdia quântica	49
2.6	REALIDADE E NÃO-LOCALIDADE DE CONTEXTO	50
2.7	ESTADOS DE DOIS QUBITS	58
3	NÃO-LOCALIDADE BASEADA EM REALISMO	61
3.1	QUANTIFICAÇÃO DE NÃO-LOCALIDADE	61
3.2	QUANTIFICANDO A NBR	63
3.3	HIERARQUIA DE QUANTICIDADE	66

3.4	COMPARANDO MEDIDAS DE NÃO-LOCALIDADE	72
3.5	MONOTONICIDADE	79
4	NÃO-LOCALIDADE FRACA BASEADA EM REALISMO	85
4.1	DEFINIÇÃO DE NFBR	89
4.1.1	NFBR unidirecional	89
4.1.2	Estados puros	91
4.1.3	Exemplo	93
4.2	FORMA SIMÉTRICA	98
4.2.1	Exemplo	100
5	GENERALIZAÇÃO PARA OUTRAS ENTROPIAS	102
6	CONCLUSÕES	112
	REFERÊNCIAS	115

1 INTRODUÇÃO

Até o final do século XIX as teorias clássicas, Mecânica Newtoniana e o Eletromagnetismo de Maxwell, foram os alicerces da física. A crença nas teorias da época era tal que, segundo a história, em 1878 o professor de Max Planck, Philipp von Jolly, o desencorajou a estudar física, pois segundo o mesmo “*apenas faltavam preencher algumas lacunas*” [1]. Como sabemos, Planck ignorou o conselho de seu mentor ingressando na carreira acadêmica. No ano de 1900, Planck apresentou durante a reunião da Sociedade Alemã de Física o trabalho intitulado “*On the Theory of the Energy Distribution Law of the Normal Spectrum*”, introduzindo a noção de quantização da energia para explicar a distribuição de energia observada experimentalmente no espectro contínuo da radiação de corpo negro [2–4].

Em 1905, Einstein, a partir da hipótese de Planck, introduziu o conceito de quantum de energia conseguindo explicar com sucesso o já conhecido efeito fotoelétrico, cuja física clássica falhava em descrever. Em seguida, a verificação de outros fenômenos, os quais a abordagem clássica mostrava-se incapaz de explicar, fez surgir a necessidade de uma teoria que explicasse corretamente as novas observações, por exemplo, o espalhamento dos raios-X pela matéria, fenômeno que ficou conhecido como efeito Compton [5]. Foi nesse cenário que a mecânica quântica (MQ) foi se desenvolvendo, graças ao empenho conjunto de físicos do século passado como, por exemplo, Planck, Einstein, Compton, cujos esforços produziram explicações consistentes para os resultados experimentais.

Dessa forma, o advento da teoria quântica no início do século XX ocasionou uma revolução científica no mundo acadêmico da época. Fenômenos antes sem explicação frente à teoria clássica, foram compreendidos quando analisados à luz da MQ. Além disso, novas descobertas, como o modelo atômico de Bohr, as ondas de matéria de de Broglie, entre outras, foram realizadas mostrando o êxito da teoria em descrever o mundo microscópico. Era fato a concordância entre os físicos sobre o uso da teoria para propostas práticas [6]. No entanto, apesar do enorme sucesso da teoria quântica, fortes divergências relacionadas à sua interpretação física ocasionaram, na primeira metade do século passado, acaloradas

discussões entre físicos consagrados daquela época.

Historicamente, Schrödinger visitou Copenhague em setembro de 1926 para discursar no Instituto Bohr sobre mecânica ondulatória, iniciando longos e animados debates com Bohr [4]. Posteriormente, intensas discussões ocorreram durante as reuniões da famosa Conferência de Solvay realizada em Bruxelas. No tocante à interpretação da MQ, as ideias disseminadas por Bohr e Heisenberg tiveram incontestável influência sobre a comunidade de físicos nos anos finais da década de 1920, tendo como marco inicial a conferência de 1927 [7]. Possivelmente, o motivo foi a famosa discussão entre Bohr, Einstein, Schrödinger, Heisenberg, entre outros, onde Bohr teve êxito em defender seu ponto de vista dos ataques extremamente inteligentes de Einstein [8], dando origem ao que ficou conhecido como interpretação de Copenhague, ou ortodoxa, da teoria quântica.

Aceita como interpretação padrão da MQ pela maioria dos físicos, essa formulação tem uma essência indeterminista. Ela tem como pilares a complexa e abstrata mecânica matricial de Heisenberg, a teoria ondulatória de Schrödinger e a interpretação probabilística de Born para a função de onda. Grandes nomes como Dirac, Jordan e outros tiveram fundamental importância na construção da atual e complexa teoria através da unificação das formulações existentes num único formalismo matemático [6, 8]. Nessa nova versão da MQ, resumidamente, a equação de Schrödinger descreve a evolução determinista do sistema quando nenhuma medição é realizada. Já o caráter indeterminístico da teoria, relacionado à sua natureza probabilística, afirma que ocorrendo uma medição, a teoria fornece apenas as probabilidades dos possíveis resultados.

Apesar da aceitação pela maior parte da comunidade acadêmica, a MQ não ficou isenta de críticas quanto ao seu conteúdo e significado conceitual. Situações envolvendo correlações entre o estado final do sistema e do aparato após a medição compuseram o mais importante enigma na interpretação da MQ [9]. Perante o formalismo quântico era proibido obter matematicamente um estado final separado para o sistema e o aparato de medição. Além disso, outra situação intrigante consistia no fato de haver, segundo a interpretação ortodoxa, dois postulados de evolução da função de onda.

Dessa forma, um postulado descrevia uma evolução determinista da função de onda de acordo com a equação de Schrödinger, enquanto o outro descrevia uma evolução total-

mente descontínua relacionada ao processo de medida, comumente chamado de colapso da função de onda [8, 9]. Outra peculiaridade enigmática era o caráter probabilístico da teoria associado à medição. A MQ fornece apenas as probabilidades de ocorrência dos possíveis resultados, fato que incomodou físicos como Einstein, o qual tornou-se um dos principais críticos da interpretação de Copenhague.

Conforme a teoria se desenvolvia, seu caráter probabilístico ficava cada vez mais evidente, fomentando um modo totalmente contraintuitivo de se observar a natureza em nível microscópico. Isso acabou originando várias discussões acerca da interpretação estatística na MQ, de modo que duas linhas de pensamentos ganharam destaque, quais sejam: a interpretação realista e a já mencionada interpretação ortodoxa [10]. Foi nesse ambiente de debates e discussões a respeito das ideias e interpretações da teoria quântica que Einstein, Podolsky e Rosen (EPR), publicaram em 1935, um artigo intitulado “*Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*” [11]. Partidários do pensamento realista, os autores reconheciam que as previsões da MQ concordavam com os resultados experimentais cuja física clássica não explicava, porém EPR relutavam em aceitar a essência indeterminista da teoria. Portanto, defenderam a ideia de que a descrição da realidade dada pela função de onda na MQ estava incompleta.

O raciocínio de EPR atacava essa suposta incompletude da teoria. A argumentação dos mesmos defendia que uma teoria física deveria tanto estar correta quanto fornecer uma descrição completa da realidade objetiva, a qual independe de qualquer teoria. Era inegável que a MQ estava correta, pois os acertos da teoria evidenciavam esse fato. Diante disso, EPR alegaram que uma condição necessária para haver completeza em uma teoria era que esta deveria contemplar cada elemento da realidade física com um componente teórico, o que eles definiram como condição de completude. Além disso, foi definido também um critério de realidade, o qual afirma que existindo tal elemento de realidade, a teoria deveria ser capaz de prever com certeza o valor da quantidade física associada a ele sem a necessidade de perturbar o sistema.

Ambos os argumentos fundamentaram a hipótese levantada por EPR, a qual foi discutida por meio de um experimento mental no famoso artigo de 1935, onde os autores discutiram o caso de dois sistemas que interagem apenas durante um intervalo de tempo

finito, sendo a seguir separados por um intervalo do gênero espaço. Assim, no momento da medição de alguma quantidade física nenhuma mudança real pode ocorrer em um sistema, dado que perturbações locais foram feitas no outro. Segundo EPR, isso é naturalmente o que se espera acontecer dada a falta de interação entre os dois sistemas. Além disso, eles argumentaram também que talvez houvesse uma formulação mais geral que a teoria quântica.

As ideias disseminadas por EPR sobre a incompletude da MQ ocasionaram um amplo cenário de discussões sobre a total validade da teoria. Dentre seus opositores, destacamos Niels Bohr cuja opinião refutava o trabalho citado acima. Segundo Bohr, para EPR era possível atribuir, sob condições adequadas, realidade simultânea a qualquer quantidade física na descrição do sistema, mesmo no caso de um par de observáveis incompatíveis, o que contrariava a teoria quântica. Bohr confrontou tal argumento afirmando que não havia incompletude na MQ e que na verdade era necessário distinguir entre arranjos e procedimentos experimentais essencialmente diferentes adequados para verificar localização espacial ou para uma aplicação do teorema de conservação do momento [12].

Na visão de Bohr, se um experimento visa medir a posição de uma partícula, então é impossível conseguir informações sobre o momento da partícula no mesmo experimento e vice-versa. As duas situações são complementares de modo que para termos uma compreensão completa do cenário acima é necessário levar em consideração tanto as medições relacionadas à localização espacial quanto ao momento. Esse argumento foi definido por Bohr como o princípio da complementaridade e foi utilizado para explicar a conhecida dualidade onda-partícula [2, 13].

Após o trabalho seminal de EPR, uma interpretação alternativa da MQ foi proposta por David Bohm em 1952 [14, 15]. Ele sugeriu uma explicação em termos de variáveis ocultas baseando-se na crença de Einstein, segundo a qual deveriam existir variáveis capazes de determinar precisamente o comportamento individual de cada sistema quântico, o que deveria explicar as correlações observadas entre sistemas não interagentes, preservando realidade e localidade. Segundo Bohm, a interpretação usual da MQ diz para esquecer qualquer possibilidade de descrição individual sem provar adequadamente que tal rejeição é necessária. Em adição, Bohr afirmou que deve-se apenas aceitar que as correlações

na MQ surgem de alguma forma. No tocante à teoria Bohmiana, a mesma foi capaz de reproduzir com precisão os resultados da interpretação ortodoxa, porém as correlações não-locais permaneceram presentes na teoria.

Depois de quase trinta anos, um importante passo foi dado por John S. Bell, na discussão iniciada em 1935, com a publicação do artigo intitulado “*On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox*” em 1964 [16]. Bell provou que as previsões da MQ são incompatíveis com qualquer teoria de variáveis ocultas locais. Para isso, ele usou o exemplo citado por Bohm e Aharonov [17] em conjunto com a argumentação de EPR introduzindo a variável oculta λ , a qual continha todo um conjunto de informações sobre o passado do sistema investigado, definindo completamente o estado do mesmo e tendo uma influência causal sobre o resultado de medições [18]. Seguindo o pressuposto de *localidade causal*, Bell obteve uma desigualdade, a qual leva seu nome, que é satisfeita por qualquer teoria de variável oculta local, porém é violada pelas previsões da MQ. Assim, em seu trabalho, Bell demonstrou matematicamente que os resultados da teoria quântica não são reproduzíveis por teorias que preservam realidade e localidade – realismo local – fazendo com que a MQ passasse a ser considerada uma teoria essencialmente não-local.

Além da prova teórica fornecida por Bell, houve também a comprovação experimental dada em 1982 por Aspect, Dalibard e Roger [19], os quais testaram e validaram experimentalmente as desigualdades de Bell. No entanto, estes experimentos permaneceram envoltos por algumas brechas (*loopholes*) que permitiam contestar o teorema de Bell. Porém, recentemente foram realizados experimentos com partículas emaranhadas, fótons e spins eletrônicos, que fecharam tais lacunas sanando os possíveis problemas relacionados aos testes experimentais das desigualdades de Bell [20–24]. Já em relação à tais desigualdades, além da versão original obtida por Bell, foram desenvolvidas outras versões sendo a de Clauser, Horne, Shimony e Holt, desigualdade CHSH, a mais utilizada devido a sua simplicidade operacional [25, 26].

Contrapondo-se ao teorema de Bell e às suas comprovações experimentais, algumas tentativas para estabelecer o realismo local na MQ foram objetos de estudo em alguns trabalhos encontrados na literatura. Nessa direção, Álvaro Balsas [27, 28] afirma que a desigualdade CHSH não pode ser diretamente comparada com os resultados experimentais

de Aspect, pois a mesma foi construída através de um raciocínio que não contempla totalmente a realidade do experimento, o que acaba por restringir o espaço de amostragem dos resultados. No mesmo caminho, Joy Christian [29, 30] estabeleceu uma hipótese realista local que confronta a validade do teorema de Bell através da álgebra não-comutativa de Clifford violando a desigualdade CHSH da mesma forma que a MQ.

No entanto, mesmo havendo pesquisadores que sustentam a ideia de que os aspectos não-locais da MQ sejam consequências de um formalismo matemático parcialmente inadequado para descrever o mundo microscópico, boa parte da comunidade de físicos aceita os fatos sinalizados pelas desigualdades de Bell encarando a não-localidade quântica como uma característica fundamental da MQ. Essa intrigante propriedade de sistemas quânticos é motivação para pesquisas que objetivam tanto uma compreensão profunda do universo quântico, quanto o desenvolvimento de novas tecnologias, especialmente nos campos da informação e computação quânticas através da implementação de circuitos quânticos, distribuição de chaves quânticas, criptografia quântica, comunicação quântica e tarefas de processamento da informação quântica [26, 31–34].

A não-localidade revelada pela violação da desigualdade de Bell é uma noção fortemente relacionada ao emaranhamento [35], termo originalmente cunhado por Erwin Schrödinger em 1935 [36]. Por outro lado, embora seja bem estabelecido que todo estado puro emaranhado viola alguma desigualdade de Bell, sendo portanto Bell não-local [35, 37, 38], é bem conhecido que existem estados mistos emaranhados que são Bell locais, ou seja, não violam desigualdades tipo Bell [39]. Em outras palavras, para estados puros emaranhamento é uma condição necessária e suficiente para haver não-localidade de Bell, porém o mesmo não pode ser dito no caso de estados mistos, para os quais emaranhamento é condição necessária, mas não suficiente [18]. Além disso, há um cenário sutil referido como anomalia de não-localidade, onde uma desigualdade de Bell é maximamente violada para estados não maximamente emaranhados [40–43].

No que diz respeito à relação entre emaranhamento e não-localidade de Bell, esperamos obter um melhor entendimento a partir da análise de quantificadores dessas quantidades. No entanto, diferentemente do quadro de quantificadores de emaranhamento que identifica um conjunto de critérios para serem satisfeitos e conta com medidas bem estabelecidas

para uma série de cenários [44], a pesquisa sobre quantificação de não-localidade de Bell é ainda iniciante. Recentemente, baseado na teoria de quantificação de emaranhamento, um princípio operacional para quantificação de não-localidade foi desenvolvido por Gallego *et al* [45]. Segundo os autores, não-localidade não pode ser criada por operações locais e comunicação clássica permitida entre as partes. Abordagens conhecidas até o presente momento envolvem máximas violações das desigualdades de Bell [26], resistência a ruído [31, 46, 47], realização de tarefas de comunicação [48–52] e, recentemente, o volume de violação [53].

Nesse trabalho, apresentamos uma contribuição para o estudo de aspectos não-locais verificados no domínio quântico, propomos uma abordagem alternativa para a quantificação da não-localidade. Aqui, diferentemente dos métodos usados para quantificar a não-localidade de Bell, não serão consideradas violações da hipótese de localidade causal para acusar presença de aspectos não-locais. Conforme será descrito no capítulo 2, adotaremos um conceito profundamente diferente da não-localidade de Bell, o critério de realidade proposto em [54], que diz sob qual condição um observável terá realidade definida para uma dada preparação. A partir desse critério, é possível construir um objeto sensível à alterações na realidade de um observável em um dado contexto. Baseados em tais alterações de realidade, conseguimos verificar a presença de não-localidade, mesmo em cenários para os quais a não-localidade de Bell é nula.

Dessa forma, no capítulo 3, introduzimos um quantificador de não-localidade baseada em realismo para estados quânticos bipartidos que se reduz ao emaranhamento no caso de estados puros, sendo livre de anomalias em dimensões arbitrárias. Ainda, mostramos que tal conceito de não-localidade, quando comparado a outros recursos quânticos, como o emaranhamento, pode ser posicionado numa classe de hierarquia de medidas de quantidade, onde é mostrado que a não-localidade baseada em realismo é mais restritiva a modelos de variáveis ocultas locais do que a não-localidade de Bell. Ademais, implementamos também alguns cenários em que nosso quantificador foi submetido a certas condições que atestaram que o mesmo é monótono sob um conjunto de transformações locais e mais resistente à ação de canais de ruído que aqueles baseados em não-localidade de Bell.

Além disso, no capítulo 4, estendemos o conceito da não-localidade baseada em rea-

lismo ao domínio das medições fracas e avaliamos seu comportamento quando tais medições são realizadas em um ou dois dos sítios onde estão alocados um sistema bipartido. Por último, no capítulo 5, fizemos uma generalização da nossa medida de não-localidade através de uma função entrópica geral. Dessa forma, foi possível determinar analiticamente, para outras entropias, um quantificador generalizado mesmo no caso de entropias não-aditivas.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo apresentaremos as ferramentas matemáticas e noções fundamentais utilizadas no desenvolvimento deste trabalho. Na primeira seção será discutido o formalismo do operador densidade e suas propriedades. Na segunda seção discutiremos o regime de medições fracas introduzido por Dieguez e Angelo [55]. Na terceira seção apresentaremos as medidas conhecidas de entropia utilizadas ao longo do trabalho. Nas duas seções seguintes, discutiremos sistemas quânticos abertos e correlações quânticas. Já na próxima seção mostraremos as noções de realidade e não-localidade fundamentais para o desenvolvimento desta tese e finalizamos o capítulo apresentando o modelo de sistemas de dois qubits usado para a obtenção dos resultados contidos na presente tese.

2.1 FORMALISMO QUÂNTICO

De acordo com a MQ, o estado de um sistema quântico isolado é descrito por um *vetor de estado* $|\psi\rangle$ pertencente a um espaço vetorial complexo denominado espaço de Hilbert \mathcal{H} , cuja dimensão é especificada pela natureza do sistema físico considerado. A evolução do vetor de estado é descrita por uma transformação unitária U , de modo que o estado $|\psi\rangle$ no instante t_1 é relacionado ao estado $|\psi'\rangle$ do sistema no instante t_2 por $|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$. Já no caso de uma quantidade física mensurável \mathcal{A} , sua descrição é dada através de um operador hermitiano A que atua em \mathcal{H} , sendo este operador um observável.

A breve discussão acima refere-se ao formalismo do vetor de estado que é geralmente empregado quando o estado do sistema é completamente conhecido. No entanto, na prática a informação que dispomos sobre o estado do sistema não é completa. Na teoria quântica, situações desse tipo são abordadas afirmando-se que o sistema pode estar no estado $|\psi_1\rangle$ com probabilidade p_1 , no estado $|\psi_2\rangle$ com probabilidade p_2 e assim por diante, onde $\sum_i p_i = 1$.

Uma forma de descrever convenientemente situações como essas é empregando-se o formalismo do *operador densidade*. Assim sendo, assumamos que um sistema quântico possa

estar no estado $|\psi_i\rangle$ com probabilidade p_i , um *ensemble* de estados puros $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ em que o operador densidade do sistema é definido por

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (2.1)$$

Suponha que a evolução de um sistema quântico fechado seja descrita por um operador unitário U . Estando inicialmente o sistema no estado $|\psi_i\rangle$ com probabilidade p_i , após sua evolução ele estará no estado $U|\psi_i\rangle$. Então, a evolução do operador densidade será dada por

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \xrightarrow{U} \sum_i p_i U|\psi_i\rangle \langle \psi_i| U^\dagger = U\rho U^\dagger. \quad (2.2)$$

Algumas propriedades de ρ podem ser deduzidas diretamente da Eq. (2.1), são elas:

- 1) Hermiticidade: $\rho^\dagger = \rho$;
- 2) Normalização: $\text{Tr}\rho = \sum_i p_i \text{Tr}(|\psi_i\rangle \langle \psi_i|) = 1$;
- 3) Positividade: $\langle \alpha | \rho | \alpha \rangle = \sum_i p_i |\langle \alpha | \psi_i \rangle|^2 \geq 0$, para todo $|\alpha\rangle$.

Em um caso geral, como descrito pela Eq. (2.1), é dito que se o estado do sistema é perfeitamente conhecido, então todas as probabilidades p_i são nulas com exceção de uma única, o que caracteriza um *estado puro*, de modo que o operador densidade é simplesmente $\rho = |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$. Nesse caso, ρ satisfaz $\text{Tr}\rho^2 = 1$, onde $\rho^2 = \rho$ (idempotência). Nesse formalismo, valores esperados e a probabilidade de uma medida do observável A fornecer resultado a são dados, respectivamente, por:

- 1) $\langle A \rangle = \text{Tr}[\rho A]$;
- 2) $\mathcal{P}(a) = \text{Tr}[A_a \rho]$,

onde $A_a = |a\rangle \langle a|$ é um projetor no subespaço associado aos autovalores a , de modo que $A = \sum_a a A_a$.

Em relação à evolução temporal do operador densidade, pode-se ver que o mesmo evolui no tempo segundo uma equação específica. Para isso, considere o estado $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$, no qual $U(t)$ é operador de evolução temporal para o vetor de estado. Nesse

caso, de acordo com a equação de Schrödinger, $i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle$, obtemos uma equação diferencial para $U(t)$, isto é,

$$i\hbar \frac{d}{dt}U(t) = H(t)U(t), \quad -i\hbar \frac{d}{dt}U^\dagger(t) = H(t)U^\dagger(t).$$

De acordo com a Eq. (2.2), temos que $\rho(t) = U(t)\rho(0)U^\dagger(t)$, então diferenciando em relação ao tempo e usando as duas equações acima, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho(t) &= \left(\frac{d}{dt}U(t)\right)\rho(0)U^\dagger(t) + U(t)\rho(0)\left(\frac{d}{dt}U^\dagger(t)\right) \\ &= \frac{1}{i\hbar}H(t)U(t)\rho(0)U^\dagger(t) - \frac{1}{i\hbar}U(t)\rho(0)U^\dagger(t)H(t) \\ &= \frac{1}{i\hbar}[H(t), \rho(t)], \end{aligned}$$

sendo esta conhecida como equação de Liouville - von Neumann. A discussão feita acima é adequada para estados puros. No caso em que consideramos estados mistos, verifica-se que $\text{Tr}\rho^2 < 1$, onde $\rho^2 \neq \rho$. Além disso, são válidas as propriedades de hermiticidade, normalização e positividade, bem como a forma de calcularmos valores esperados e probabilidades. Da mesma forma que o caso puro, a evolução temporal é dada também pela equação de Liouville - von Neumann deduzida acima. Considere agora que desejamos realizar uma medição descrita por operadores de projeção A_a . Se o estado inicial for $|\psi_i\rangle$, então a probabilidade condicional de se obter a numa medida do observável A será

$$p(a|i) = \langle \psi_i | A_a | \psi_i \rangle = \text{Tr}(A_a |\psi_i\rangle \langle \psi_i|), \quad (2.3)$$

onde pela lei da probabilidade total, a probabilidade de se obter a como resultado será

$$p(a) = \sum_i p(a|i)p_i = \sum_i p_i \text{Tr}(A_a |\psi_i\rangle \langle \psi_i|) = \text{Tr}(A_a \rho). \quad (2.4)$$

Após a obtenção do resultado a , o estado normalizado do sistema será, de acordo com o postulado da redução,

$$|\psi_i^a\rangle = \frac{A_a |\psi_i\rangle}{\sqrt{\langle \psi_i | A_a | \psi_i \rangle}}. \quad (2.5)$$

Logo, após a medida que fornece o resultado a , obtemos o ensemble de estados $|\psi_i^a\rangle$ com probabilidades $p(i|a)$ cujo operador densidade é

$$\rho_a = \sum_i p(i|a) |\psi_i^a\rangle \langle \psi_i^a| = \sum_i p(i|a) \frac{A_a |\psi_i\rangle \langle \psi_i| A_a^\dagger}{\langle \psi_i | A_a | \psi_i \rangle}. \quad (2.6)$$

De acordo com a regra de Bayes, $p(i|a) = p(a, i)/p(a) = p(a|i)p_i/p(a)$. Logo, das Eqs. (2.3), (2.4) e (2.6), temos

$$\rho_a = \sum_i p_i \frac{A_a |\psi_i\rangle \langle \psi_i| A_a^\dagger}{\text{Tr}(A_a \rho)} = \frac{A_a \rho A_a^\dagger}{\text{Tr}(A_a \rho)}, \quad (2.7)$$

que representa o colapso no formalismo do operador densidade.

Além de descrever adequadamente sistemas cujo estado não é bem conhecido, esse formalismo é também uma boa ferramenta para descrição de sistemas constituintes de sistemas multipartidos. Tal descrição é fornecida pelo *operador densidade reduzido*. Por exemplo, considere o estado reduzido $\rho_{\mathcal{A}(\mathcal{B})}$ e o estado global descrito pelo operador densidade $\rho_{\mathcal{AB}}$ atuando em $\mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$, um estado bipartido. O operador densidade reduzido para o sistema $\rho_{\mathcal{A}}$ é

$$\rho_{\mathcal{A}} \equiv \text{Tr}_{\mathcal{B}} \rho_{\mathcal{AB}}, \quad (2.8)$$

onde $\text{Tr}_{\mathcal{B}}$ é uma operação conhecida como traço parcial sobre o sistema $\rho_{\mathcal{AB}}$. O traço parcial é definido por

$$\text{Tr}_{\mathcal{B}}(|a_1\rangle \langle a_2| \otimes |b_1\rangle \langle b_2|) \equiv |a_1\rangle \langle a_2| \text{Tr}(|b_1\rangle \langle b_2|), \quad (2.9)$$

sendo $|a_{1(2)}\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$, enquanto $|b_{1(2)}\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$. No lado direito da equação acima, $\text{Tr}(|b_1\rangle \langle b_2|) = \langle b_2 | b_1 \rangle$ é a operação usual do traço para o subsistema \mathcal{B} .

2.1.1 Problema da medição

O modelo de von Neumann fornece um quadro geral para descrever o processo de medição em termos de correlações no vetor de estado do sistema global, considerando um sistema de interesse \mathcal{S} e aparato de medição \mathcal{M} .

Nesse modelo, inicialmente \mathcal{S} e \mathcal{M} são descritos por um estado produto $|\psi_0\rangle$ e intera-

gem durante o tempo de medição tornando-se emaranhados. Para entendermos como esse modelo funciona, vamos considerar que uma quantidade física medida em \mathcal{S} é descrita por um operador hermitiano A atuando em $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$, onde

$$A|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle, \quad (2.10)$$

sendo $|a_n\rangle$ autovetores normalizados associados com autovalores não-degenerados a_n . Inicialmente, vamos considerar o caso em que \mathcal{S} está em algum dos autoestados associados ao observável A , isto é, $|\phi_0\rangle = |a_n\rangle$. Em relação ao aparato de medição, assumimos que o mesmo esteja no estado $|\Phi_0\rangle$. Logo,

$$|\psi_0\rangle = |a_n\rangle \otimes |\Phi_0\rangle. \quad (2.11)$$

Após a medição, \mathcal{S} permanece no estado $|a_n\rangle$. No entanto, o aparato de medição atinge o estado $|\Phi'_n\rangle$, o qual depende de n e faz com que o resultado seja acessível experimentalmente, já que a posição do ponteiro usado para ler o resultado deve depender de n . O efeito da medição pode ser resumido como

$$|\psi_0\rangle = |a_n\rangle \otimes |\Phi_0\rangle \longrightarrow |\psi'\rangle = |a_n\rangle \otimes |\Phi'_n\rangle, \quad (2.12)$$

onde $|\Phi'_n\rangle$ são normalizados. Note que nenhum emaranhamento surgiu entre \mathcal{S} e \mathcal{M} . Isso simplesmente corresponde à situação onde o resultado da medição é certo. Agora vamos considerar um caso mais geral, onde o estado de \mathcal{S} é a combinação linear

$$|\phi_0\rangle = \sum_{n=1}^N c_n |a_n\rangle, \quad (2.13)$$

onde c_n são coeficientes complexos e $\sum_n |c_n|^2 = 1$ é a condição de normalização. Assim, o estado $|\psi_0\rangle$ é reescrito como

$$|\psi_0\rangle = \sum_n c_n |a_n\rangle \otimes |\Phi_0\rangle, \quad (2.14)$$

sendo que após a medição temos

$$|\psi_0\rangle \longrightarrow |\psi'\rangle = \sum_n c_n |a_n\rangle \otimes |\Phi'_n\rangle, \quad (2.15)$$

onde temos emaranhamento entre \mathcal{M} e \mathcal{S} .

Note que após a medição não é mais possível atribuir um vetor de estado a \mathcal{S} , mas apenas um operador densidade reduzido. Uma vez que $|\Phi'_n\rangle$ são mutualmente ortogonais e normalizados, temos

$$\rho'_S = \text{Tr}_{\mathcal{M}} (|\psi'\rangle\langle\psi'|) = \sum_n |c_n|^2 |a_n\rangle\langle a_n|. \quad (2.16)$$

Este resultado expressa que o sistema medido tem probabilidade $|c_n|^2$ de estar em cada um dos estados associados com os resultados a_n , o que corresponde exatamente à regra de probabilidade de Born. Note que todos os resultados possíveis estão contidos em ρ'_S , de modo que o sistema é matematicamente descrito por uma soma contendo simultaneamente todos os possíveis resultados, enquanto que na realidade um único resultado é observado.

Para resolver este problema, von Neumann introduziu o postulado da redução de estado que força a singularidade do resultado da medição. De acordo com esse postulado, um único resultado a_r é observado após a medição e, nas Eqs. (2.15-2.16), todos os componentes são suprimidos, exceto aquele em que $n = r$. Sob estas condições, o estado após a medição torna-se um estado produto e o emaranhamento desaparece.

2.2 MEDIÇÕES FRACAS

Conforme foi visto no começo do presente capítulo, o formalismo do operador densidade empregado ao longo desse trabalho nos permite descrever o processo de medição através dos operadores de projeção definidos em termos dos autoestados de um observável. Tais operadores foram introduzidos por von Neumann no que ficou conhecido como postulado da redução de estado ou do colapso. Isso força a emergência do resultado único observado no experimento.

Dessa forma, considere um operador densidade ρ atuando em um espaço de Hilbert

bipartido, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, e um observável $A = \sum_a a A_a$, com projetores $A_a = |a\rangle\langle a|$ atuando em \mathcal{H}_A . Imaginando que se um observável A for medido em um experimento qualquer, resultando no autovalor a , então o estado do sistema após a medição é dado, via Eq. (2.7), por

$$\Phi_{(a|A)}(\rho) = \frac{(A_a \otimes \mathbb{1}_B)\rho(A_a \otimes \mathbb{1}_B)}{\text{Tr}[(A_a \otimes \mathbb{1}_B)\rho(A_a \otimes \mathbb{1}_B)]}, \quad (2.17)$$

onde $p_a = \text{Tr}[(A_a \otimes \mathbb{1}_B)\rho(A_a \otimes \mathbb{1}_B)]$ é a probabilidade de saída do resultado a .

Aqui, o termo $\Phi_{(a|A)}$ é um mapa linear que descreve matematicamente o processo de redução do estado mencionado logo acima. Esse processo de medição é conhecido como medição projetiva com resultado revelado. Se, por outro lado, o resultado da medição não for revelado, então o resultado pós-medição será

$$\Phi_A(\rho) = \sum_a p_a \Phi_{(a|A)}(\rho) = \sum_a (A_a \otimes \mathbb{1}_B)\rho(A_a \otimes \mathbb{1}_B),$$

sendo Φ_A um mapa completamente positivo que preserva o traço, o qual será interpretado ao longo desta tese como um descritor de uma medição projetiva não-revelada, o que ficará mais claro nas seções finais do presente capítulo.

Um outro tipo de processo de medição existente na literatura é conhecido como medição fraca [56], um processo no qual o estado do sistema quântico não é significativamente alterado durante uma fraca interação com o aparato de medição, ou seja, a medição não é projetiva. Uma forma de implementar o processo de medições fracas é encontrada na referência [55]. Nessa abordagem, os autores introduziram um processo chamado de *monitoramento*, o qual refere-se a um mapa completamente positivo que preserva o traço e que é capaz de interpolar entre medições fracas e projetivas.

Matematicamente, o modelo de medições fracas definido pelo processo de monitoramento é descrito pelo mapa

$$M_O^\mathcal{E}(\rho) := (1 - \mathcal{E})\rho + \mathcal{E} \Phi_O(\rho), \quad (2.18)$$

para um parâmetro real $\mathcal{E} \in (0, 1)$, um estado ρ no espaço $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ e um observável genérico O atuando em \mathcal{H}_A ou \mathcal{H}_B . Note que este mapa é capaz de interpolar entre um regime de nenhuma medição, $M_O^{\mathcal{E} \rightarrow 0}(\rho) = \rho$, e um regime de medições projetivas não-

reveladas, $M_O^{\mathcal{E} \rightarrow 1}(\rho) = \Phi_O(\rho)$. Entre os dois extremos de \mathcal{E} , isto é, para $0 < \mathcal{E} < 1$, o respectivo mapa representa processos de medições fracas não-reveladas. No que diz respeito à implementação experimental, foram realizadas, recentemente, medições fracas usando o estado de polarização de um único qubit fotônico para medir o grau de realidade de observáveis. Informações detalhadas podem ser encontradas na referência [57].

Uma aplicação direta da definição (2.18) evidencia uma propriedade interessante que relaciona os respectivos mapas de monitoramento e de medição projetiva. É imediato mostrar a partir de $\Phi_O \Phi_O(\rho) = \Phi_O(\rho)$ que $M_O^{\mathcal{E}}(\Phi_O(\rho)) = (1 - \mathcal{E})\Phi_O(\rho) + \mathcal{E}\Phi_O(\rho) = \Phi_O(\rho)$ e $\Phi_O(M_O^{\mathcal{E}}(\rho)) = \Phi_O((1 - \mathcal{E})\rho + \mathcal{E}\Phi_O(\rho)) = \Phi_O(\rho)$, isto é,

$$M_O^{\mathcal{E}}\Phi_O = \Phi_O M_O^{\mathcal{E}} = \Phi_O, \quad (2.19)$$

o que nos mostra que $[M_O^{\mathcal{E}}, \Phi_O] = 0$ e que uma aplicação de $M_O^{\mathcal{E}}$ não altera estados com saída definida Φ_O e que a atuação de mapas de medição projetiva sobre $M_O^{\mathcal{E}}$ leva também a Φ_O . Dessa forma, a aplicação do monitoramento sobre um estado com saída definida, embora não-revelada, não altera o fato de que o observável tem saída definida. De forma similar, a atuação de uma medição projetiva após um processo de monitoramento definirá o valor do observável medido. Podemos assim dizer que a medição projetiva tem prevalência sobre o monitoramento, qualquer que seja a ordem de aplicação desses processos. Outra propriedade interessante é a regra de aplicações sucessivas, a qual afirma que

$$[M_O^{\mathcal{E}}]^n(\rho) = (1 - \mathcal{E})^n \rho + [1 - (1 - \mathcal{E})^n] \Phi_O(\rho), \quad (2.20)$$

de modo que $[M_O^{\mathcal{E}}]^{n \rightarrow \infty}(\rho) = \Phi_O(\rho)$. Este resultado mostra que a aplicação sucessiva de infinitos monitoramentos do mesmo observável é equivalente a uma medição projetiva não-revelada.

2.3 ENTROPIA QUÂNTICA

Entropia é um dos conceitos chaves em ambas as teorias da informação clássica e quântica. Ela mede quanta incerteza há no estado de um sistema físico [31], ou seja, ela

quantifica a informação. Dessa forma, uma exigência mínima que deve ser feita para tal função é que ela seja aditiva para eventos independentes (descorrelacionados) [58]. Nesta seção, vamos descrever rapidamente algumas funções entrópicas conhecidas na literatura, dentre elas as entropias de von Neumann, linear, Rényi, Tsallis e entropia generalizada definida em [59].

2.3.1 Entropia de von Neumann

Uma das funções mais utilizadas para definir a entropia de estados quânticos é a entropia de von Neumann (S). Supondo um sistema cujo estado é descrito por um operador densidade ρ , a entropia de von Neumann é definida como

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln \rho) = -\sum_i \lambda_i \ln \lambda_i, \quad (2.21)$$

onde λ_i são os autovalores de ρ .

A entropia de von Neumann possui várias propriedades úteis. Abaixo listamos aquelas mais relevantes para o trabalho aqui desenvolvido.

- (i) A entropia é não-negativa, $S(\rho) \geq 0$, anulando-se apenas no caso de estados puros.
- (ii) É limitada superiormente por $\ln d$, sendo d a dimensão do espaço de Hilbert. Nesse caso, a entropia é igual a $\ln d$ se, e somente se, o sistema estiver no estado maximamente misturado $\mathbb{1}/d$.
- (iii) Permanece invariante sob transformações unitárias, $S(U\rho U^\dagger) = S(\rho)$.
- (iv) Se um sistema bipartido ρ_{AB} é puro, temos que $S(\rho_A) = S(\rho_B)$, sendo ρ_A e ρ_B os operadores densidade reduzidos atuando em \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , respectivamente.
- (v) (Teorema da entropia conjunta) Sendo p_i probabilidades, $|i\rangle$ estados ortonormais para o sistema \mathcal{A} e ρ_i qualquer conjunto de operadores densidades em \mathcal{B} , temos

$$S\left(\sum_i p_i |i\rangle\langle i| \otimes \rho_i\right) = H(p_i) + \sum_i p_i S(\rho_i), \quad (2.22)$$

sendo $H(p_i)$ a entropia de Shannon da teoria de informação clássica associada com a distribuição de probabilidades p_i . Essa entropia será discutida mais adiante.

- (vi) Em um sistema quântico ρ_{AB} , devem ser satisfeitas a desigualdade de subaditividade $S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B)$ e a desigualdade triangular $S(\rho_{AB}) \geq |S(\rho_A) - S(\rho_B)|$. Na primeira relação, a igualdade ocorre para estados descorrelacionados, ou seja, $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$, enquanto que na segunda a igualdade ocorre para estados puros.
- (vii) A entropia é uma função côncava, ou seja, dadas as probabilidades p_i , com $\sum_i p_i = 1$, e o correspondente operador densidade ρ_i , temos que a entropia deve satisfazer a desigualdade $S(\sum_i p_i \rho_i) \geq \sum_i p_i S(\rho_i)$.
- (viii) Para estado quânticos ρ_{ABC} tripartidos, vale a desigualdade $S(\rho_{ABC}) + S(\rho_B) \leq S(\rho_{AB}) + S(\rho_{BC})$, conhecida como subaditividade forte.

A entropia de von Neumann, apesar de bem definida conceitualmente e bastante utilizada no campo da informação quântica, possui uma desvantagem operacional: sua aplicação pode ser muito complexa em alguns casos, já que é necessário diagonalizar o operador densidade ρ , o que nem sempre é um procedimento simples. Devido a isso, outras funções entrópicas têm sido usadas como alternativa. Abaixo discutiremos algumas entropias conhecidas.

2.3.2 Entropia linear

Em teoria da informação quântica, outra função entrópica bastante utilizada é a entropia linear proposta por U. Fano [60] em 1957. Fano apontou que a quantidade $\text{Tr}\rho^2$ proporcionava uma potencial medida de informação. Usualmente, a entropia linear (S_L) é uma boa medida da pureza de estados quânticos [61] sendo definida como

$$S_L(\rho) = 1 - \text{Tr}\rho^2. \quad (2.23)$$

A mesma informação conceitual trazida pela entropia de von Neumann em relação à pureza é igualmente englobada pela entropia linear. A equivalência conceitual com a entropia de von Neumann pode ser ilustrada através de alguns limites particulares.

Tomando-se um estado puro normalizado é válida a condição de idempotência implicando em $S_L = 0$ como é mostrado pela entropia de von Neumann. Porém, se ρ não satisfaz a idempotência temos $0 \leq \text{Tr} \rho^2 < 1$ e consequentemente $0 < S_L \leq 1$.

Apesar da equivalência conceitual no caso de estados puros, as entropias não possuem as mesmas amplitudes. Isso pode ser mostrado considerando-se o exemplo de um estado maximamente misturado dado por

$$\rho = \frac{1}{d} \sum_{n=1}^d |n\rangle\langle n|, \quad (2.24)$$

onde d é a dimensão do espaço de Hilbert e $|n\rangle\langle n|$ são estados puros igualmente prováveis. Nesse caso, verificamos que $S_L = 1 - 1/d$, enquanto que $S = \ln d$. Portanto quando $d \rightarrow \infty$, notamos que $0 \leq S_L \leq 1$ e $0 \leq S \leq \infty$. Note ainda que S e S_L são funções monótonas de d , sendo também funções monótonas uma da outra, ou seja, $S_L(\rho) = 1 - e^{-S(\rho)}$.

2.3.3 Entropia de Rényi

A entropia de Rényi [62] é uma família de funcionais que quantifica a diversidade, incerteza ou aleatoriedade de um sistema. A entropia de Rényi de ordem α é definida como

$$S_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \log \left(\sum_{i=1}^d p_i^\alpha \right), \quad (2.25)$$

onde $\alpha > 0$ e $\alpha \neq 1$, X é uma variável discreta, p_i é a probabilidade de evento $X = x_i$ e o logaritmo é dado na base 2. Se os eventos forem todos equiprováveis, então todas as entropias de Rényi da distribuição são iguais, sendo $S_\alpha(X) = \log n$. Caso contrário, as entropias de Rényi decrescem em função de α . Dentro do cenário quântico, a entropia de Rényi para um estado ρ possui um análogo dado por

$$S_\alpha(\rho) = \frac{1}{1-\alpha} \log \text{Tr}(\rho^\alpha), \quad (2.26)$$

sendo que no limite em que $\alpha \rightarrow 1$, podemos obter a entropia de von Neumann, isto é,

$$S_1(\rho) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{1-\alpha} \log \text{Tr}(\rho^\alpha) = -\text{Tr}(\rho \log \rho). \quad (2.27)$$

2.3.4 Entropia de Tsallis

Em 1988 Constantino Tsallis [63] formulou uma possível generalização da entropia de Boltzmann-Gibbs, o que ficou conhecido como entropia de Tsallis. Em seu trabalho, Tsallis generalizou a expressão padrão da entropia estatística, $S = -\sum_i^w p_i \ln p_i$, onde $w \in \mathbb{N}$ é o número total de possíveis configurações microscópicas e p_i são as probabilidades associadas. Tsallis postulou que

$$S_q = \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_i p_i^q \right), \quad (2.28)$$

onde $\sum_i p_i = 1$.

Diferentemente da entropia de von Neumann, a entropia de Tsallis é não-aditiva, ou seja, dados as variáveis aleatórias A e B , essa entropia fornece $S_q(A, B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)S_q(A)S_q(B)$, sendo que no limite em que $q \rightarrow 1$ recupera-se a aditividade, isto é, $S_1(A, B) = S_1(A) + S_1(B)$.

No tocante ao cenário quântico, a generalização dessa entropia é dada por

$$S_q(\rho) = \frac{1 - \text{Tr} \rho^q}{q-1}, \quad (2.29)$$

sendo $\text{Tr} \rho^q$ a pureza generalizada. A partir da equação acima, no limite em que $q \rightarrow 1$, obtemos a entropia de von Neumann, Eq. (2.21), enquanto $q = 2$ fornece a entropia linear, Eq. (2.23).

2.3.5 Entropia generalizada quântica

A entropia generalizada quântica, introduzida originalmente por X. Hu e Z. Ye [59], apresenta algumas propriedades comuns a outras entropias como a não-negatividade e a concavidade. Também conhecida como entropia- (q, s) [59, 64], ela é definida como

$$S_{(q,s)}(\rho) = \frac{(\text{Tr} \rho^q)^s - 1}{s(1-q)}, \quad (2.30)$$

sendo $q > 0$, $q \neq 1$ e $s \neq 0$. Note que, da Eq. (2.30), pode-se obter a entropia de Tsallis tomando-se $s = 1$, isto é,

$$S_{(q,1)}(\rho) = \frac{1 - \text{Tr}\rho^q}{q - 1}, \quad (2.31)$$

a partir da qual podemos obter, para $q = 2$, a entropia linear $S_{(2,1)}(\rho) = 1 - \text{Tr}\rho^2$ e a entropia de von Neumann $S_{(1,1)}(\rho) = -\text{Tr}\rho \ln \rho$, quando $q \rightarrow 1$. Ainda, a entropia de Rényi é obtida no caso em que $s \rightarrow 0$,

$$S_{(q,0)}(\rho) = \frac{\ln \text{Tr}\rho^q}{1 - q}. \quad (2.32)$$

É importante ressaltar que $S_{(q,s)}(\rho)$ não satisfaz a propriedade de subaditividade. Isso pode ser verificado considerando-se um sistema descorrelacionado, $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$, para o qual a desigualdade de subaditividade diz que $S(\rho_{AB}) = S(\rho_A) + S(\rho_B)$. Porém, no caso da entropia- (q, s) , verificamos que

$$S_{(q,s)}(\rho_A \otimes \rho_B) = S_{(q,s)}(\rho_A) + S_{(q,s)}(\rho_B) + s(1 - q)S_{(q,s)}(\rho_A)S_{(q,s)}(\rho_B), \quad (2.33)$$

onde tomando $q = 1$ ou $s = 0$ recuperamos a aditividade das entropias de von Neumann e de Rényi.

2.3.6 Entropia e informação

Em termos clássicos, a informação é descrita através da entropia de Shannon [31],

$$H(A) = - \sum_a p_a \log(p_a), \quad (2.34)$$

a qual descreve a ignorância sobre uma variável aleatória A . Esta função entrópica é classicamente análoga à entropia de von Neumann descrita acima. A partir da definição da entropia de Shannon, é possível considerar o problema de duas variáveis aleatórias, isto é, podemos medir a nossa ignorância sobre o par (A, B) . Isso pode ser feito utilizando-se a entropia conjunta $H(A, B) = - \sum_{a,b} p(a, b) \ln p(a, b)$. Ainda, considerando-se o mesmo par de variáveis e o caso onde adquirimos informação sobre B , é possível também medir o quão ignorante somos em relação a A mesmo conhecendo B . Essa situação é descrita

pela entropia condicional, definida como

$$H(A|B) = H(A, B) - H(B). \quad (2.35)$$

Além disso, considerando as variáveis aleatórias A e B , a correlação existente entre essas duas variáveis será dada em termos da informação mútua

$$J(A: B) = H(A) - H(A|B), \quad (2.36)$$

a qual quantifica o grau de correlação entre as variáveis, ou seja, o quanto de informação elas têm em comum. Através da entropia condicional, Eq. (2.35), é possível reescrever a informação mútua como

$$I(A: B) = H(A) + H(B) - H(A, B), \quad (2.37)$$

de modo que a informação mútua pode ser também obtida a partir da entropia de cada variável e da entropia conjunta. Classicamente, $J(A: B)$ e $I(A: B)$ são idênticas, porém generalizando o conceito de informação mútua para o caso quântico, devemos trocar a entropia de Shannon pela entropia de von Neumann e a variável aleatória pelo operador densidade ρ . Assim, considerando um sistema quântico bipartido ρ_{AB} e os respectivos operadores densidades reduzidos ρ_A e ρ_B , o análogo quântico da Eq. (2.36) pode ser escrito como

$$J(\rho_{AB}) = S(\rho_A) - S(\rho_A|\rho_B). \quad (2.38)$$

Já no caso da expressão quântica para I , temos

$$I(\rho_{AB}) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}). \quad (2.39)$$

Embora J e I sejam iguais em um caso clássico, o mesmo não acontece no cenário quântico, onde as Eq. (2.38) e (2.39) podem fornecer valores diferentes. Essa diferença dá origem a um tipo de correlação quântica conhecida como discórdia, a qual será discutida mais adiante.

2.4 SISTEMAS QUÂNTICOS ABERTOS

Sistemas quânticos abertos descrevem uma situação mais real onde as interações com o exterior são contabilizadas na descrição do sistema em estudo. Quando lidamos com tais sistemas quânticos, interações incontrolláveis com o ambiente são tratadas na forma de ruído, o qual desejamos controlar com a finalidade de construirmos sistemas úteis de processamento da informação quântica. Em outras palavras, um sistema quântico aberto é aquele que sofre interações com algum sistema ambiente, cuja dinâmica se deseja negligenciar. Em contrapartida à descrição da dinâmica de um sistema quântico fechado que é feita em termos de uma evolução unitária, sistemas quânticos abertos seguem uma dinâmica não-unitária.

O formalismo matemático das operações quânticas compõe uma ferramenta chave na descrição de sistemas quânticos abertos ou fechados que são fracamente ou fortemente acoplados com um ambiente. Como exemplo de operações quânticas podemos considerar uma transformação unitária $\mathcal{T}(\rho) = U\rho U^\dagger$ e o processo de medição mostrado na Eq. (2.17), onde o mapa $\Phi_{(a|A)}$ denota a operação quântica e $\Phi_{(a|A)}(\rho)$ o estado do sistema ao fim de cada processo. A dinâmica de um sistema quântico aberto pode ser considerada como surgindo da interação entre um sistema de interesse e um ambiente que formam juntos um sistema quântico fechado.

Em outras palavras, considere um sistema no estado ρ , o qual é enviado a uma caixa acoplada a um ambiente. Assumimos que o estado inicial de entrada do sistema-ambiente enviado para a caixa seja um estado produto, $\rho \otimes \rho_A$. Após a transformação da caixa U , não há mais interação entre o sistema e o ambiente de modo que realizamos um traço parcial sobre o ambiente para obtermos o estado reduzido

$$\mathcal{E}(\rho) = \text{Tr}_A[U(\rho \otimes \rho_A)U^\dagger], \quad (2.40)$$

onde essa equação é uma definição de uma operação quântica. Este é o teorema de Stinespring [31], segundo o qual toda operação quântica positiva e que preserva o traço pode ser descrita como mostrado na equação acima, ou seja, via dinâmica de correlação seguida de traço parcial do sistema auxiliar.

2.4.1 Representação do operador-soma

Nesta subseção apresentaremos o formalismo matemático que utilizamos no desenvolvimento das operações quânticas presentes nesse trabalho e para a obtenção dos resultados que serão exibidos nos capítulos seguintes, a *representação do operador-soma* ou representação de Kraus [31].

Considere uma interação do tipo sistema de interesse, ou principal, mais ambiente. Mais especificamente, suponha que o sistema principal se encontre no estado ρ , e que $\rho_A = |a_0\rangle\langle a_0|$ seja o estado inicial do ambiente, onde $\{|a_k\rangle\}$ forma uma base ortonormal em \mathcal{H}_A . O termo ambiente é apenas um nome genérico para designar o sistema ao qual não temos acesso ou sobre o qual não temos interesse.

Assim, vamos assumir que a interação entre eles seja através de uma transformação unitária U de modo que obtemos $U(\rho \otimes \rho_A)U^\dagger$. Como estamos interessados no estado final do sistema principal, realizamos um traço parcial sobre o ambiente e encontramos

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\rho) &= \sum_k \langle a_k|U(\rho \otimes |a_0\rangle\langle a_0|)U^\dagger|a_k\rangle \\ &= \sum_k E_k \rho E_k^\dagger,\end{aligned}\tag{2.41}$$

onde $E_k = \langle a_k|U|a_0\rangle$ é um operador sobre o espaço de estados do sistema principal. Essa equação é conhecida como representação de operador-soma.

Os termos $\{E_k\}$ são chamados de elementos de operação e satisfazem uma relação de completeza dada por $\sum_k E_k^\dagger E_k = \mathbb{1}$, sendo esta relação satisfeita por qualquer operação quântica que preserve o traço, $\text{Tr } \mathcal{E}(\rho) = 1$. A representação de operador-soma é importante, pois fornece um meio intrínseco de caracterizar a dinâmica do sistema de interesse.

Esse formalismo fornece uma forma de caracterizarmos a dinâmica do sistema principal sem a necessidade de considerar as propriedades do ambiente, pois os operadores E_k atuam apenas no sistema de interesse. Vejamos agora a interpretação física da representação de operador-soma. Para isso, imagine que uma medição projetiva é feita sobre o ambiente na base $|a_k\rangle$ após a transformação unitária U ter ocorrido. Dessa forma, considere o estado

não-normalizado do sistema de interesse dado que o resultado k foi obtido como sendo

$$\varrho_k = \text{Tr}_A \left(|a_k\rangle\langle a_k| U(\rho \otimes |a_0\rangle\langle a_0|) U^\dagger |a_k\rangle\langle a_k| \right) = \langle a_k| U(\rho \otimes |a_0\rangle\langle a_0|) U^\dagger |a_k\rangle = E_k \rho E_k^\dagger, \quad (2.42)$$

onde após a normalização, obtemos

$$\rho_k = \frac{E_k \rho E_k^\dagger}{\text{Tr}(E_k \rho E_k^\dagger)}, \quad (2.43)$$

sendo a probabilidade de se obter o resultado k dada por

$$p_k = \text{Tr} \left(|a_k\rangle\langle a_k| U(\rho \otimes |a_0\rangle\langle a_0|) U^\dagger |a_k\rangle\langle a_k| \right) = \text{Tr} (E_k \rho E_k^\dagger). \quad (2.44)$$

Dessa forma, temos

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_k p_k \rho_k = \sum_k E_k \rho E_k^\dagger. \quad (2.45)$$

Isso nos fornece uma interpretação física do que está acontecendo numa operação quântica com elementos de operação quântica E_k . A ação da operação quântica é equivalente à medição não revelada introduzida previamente, exceto pelo fato de que os operadores de medição E_k não são projetores e, portanto, denotam medições gerais. Ainda, o formalismo dos operadores de Kraus é útil também para descrevermos operações quânticas que descrevem o processo de ruído quântico que é modelado por operações conhecidas como canais de ruído quântico.

2.4.2 Canais de ruído quântico

Apresentaremos aqui, seguindo o formalismo descrito acima, os modelos de canais de ruído [31, 65] usados no desenvolvimento desse trabalho. Tais canais de ruído modelam diferentes efeitos do ambiente sobre o sistema quântico considerado. No caso dos canais de inversão, como o canal de inversão de bit (IB), inversão de fase (IF) e inversão de bit e fase (IBF), ocorre a destruição da informação contida nas relações de fase, coerências, sem troca de energia entre o sistema quântico e o ambiente. Seus elementos de operação quântica são apresentados abaixo:

- (i) Para o canal de inversão de bit (IB) temos $E_0 = \sqrt{p} \mathbb{1}$ e $E_1 = \sqrt{1-p} \sigma_1$;
- (ii) Para o canal de inversão de fase (IF) temos $E_0 = \sqrt{p} \mathbb{1}$ e $E_1 = \sqrt{1-p} \sigma_3$;
- (iii) Para o canal de inversão de bit e fase (IBF) temos $E_0 = \sqrt{p} \mathbb{1}$ e $E_1 = \sqrt{1-p} \sigma_2$,

sendo que em todos os casos, $\mathbb{1}$ representa a matriz identidade enquanto que $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ representam as matrizes de Pauli. Uma representação geométrica através da esfera de Bloch para um qubit pode ser visualizada em [31], onde todos os pontos na esfera são uniformemente comprimidos em torno do eixo x no caso do canal de IB, significando que os estados sobre esse eixo são invariantes sob a ação desse canal. O mesmo vale para os estados sobre o eixo y no caso do canal de IBF e para os estados sobre o eixo z no caso do canal de IF. Já o canal de despolarização (DP) leva o estado do sistema para o estado completamente misturado, $\rho = \mathbb{1}/2$. Seus elementos de operação quântica são dados por $E_0 = \sqrt{1-3p/4} \mathbb{1}$ e $E_{1,2,3} = \sqrt{p/4} \sigma_{1,2,3}$, onde $\sigma_{1,2,3}$ representam as matrizes de Pauli.

Por fim, o canal de atenuação de amplitude generalizada (AAG) é utilizado para descrever a interação dissipativa entre o sistema e o ambiente, isto é, o sistema perde energia para o ambiente até atingir o equilíbrio térmico. Seus elementos de operação quântica são dados por

$$E_0 = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, E_1 = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D & 0 \end{pmatrix},$$

sendo $A = \sqrt{1-\gamma}$, $B = \sqrt{\gamma}$, $C = \sqrt{1-\gamma}$, $D = \sqrt{\gamma}$ e onde em todos os canais, p e γ são as probabilidades de descoerência.

Por descoerência, entende-se como o fenômeno de destruição da coerência quântica, sendo portanto, um processo relevante para muitas experiências que dependem da obtenção e manutenção de estados emaranhados [66]. Este fenômeno, causado principalmente pela injeção de ruído no sistema e decorrente de sua inevitável interação com o ambiente, é responsável pela perda de coerência quântica inicialmente presente no sistema [65]. Esse é o processo físico responsável pela emergência do mundo clássico a partir do mundo quântico [66, 67].

Muitas das discussões sobre descoerência são descritas em termos do problema de uma partícula movendo-se em uma dimensão que se encontra em um estado inicial de

superposição correspondendo a dois pacotes de onda separados por uma distância d , como a situação discutida por R.F. O'Connell [66], o qual considera uma partícula acoplada a um reservatório arbitrário em equilíbrio térmico a uma temperatura T . O autor analisa um caso em que não há dissipação de energia mostrando que o tempo de descoerência tem uma relação inversa com a temperatura, ou seja, quanto maior a temperatura, mais os pacotes são espalhados.

2.5 CORRELAÇÕES QUÂNTICAS

Correlações quânticas estão no núcleo da diferença entre os mundos clássico e quântico [64], sendo elementos essenciais da teoria quântica. Observações feitas em laboratórios são interpretadas por meio da correlação entre o sistema preparado e o resultado lido. Assim, a informação que se pode obter da natureza é de certa forma determinada por quanto o sistema de interesse pode ser correlacionado, através de interações físicas, com o aparato [26]. Logo, é compreensível que correlações quânticas sejam elementos importantes nas recentes teorias de informação e computação quânticas. Elas têm sido de intenso interesse desde o famoso artigo de EPR que foi o primeiro a apontar a existência dessas estranhas propriedades de estados quânticos [31].

O trabalho de EPR foi uma crítica à MQ. Para os autores, embora a teoria fosse capaz de prever corretamente uma série de fenômenos físicos, ela não poderia ser considerada uma teoria completa. Segundo o argumento defendido por EPR, para ser considerada completa, uma teoria deveria abranger os conceitos de completude, realidade e localidade conforme foi discutido na introdução desta tese.

Para termos uma ideia mais clara do argumento EPR, vamos analisar a versão apresentada por David Bohm [68], que considera um sistema de variáveis discretas ao invés de contínuas. Assim, considere um sistema de duas partículas no estado singleto,

$$|s\rangle = \frac{|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.46)$$

sendo $|\pm\rangle$ autoestados de σ_z com autovalores $\pm\hbar/2$. Fazendo uma mudança de base na Eq. (2.46), podemos escrevê-la na base de autoestados de σ_x , ou seja, $|s\rangle = \frac{|+\rangle_x|-\rangle_x - |-\rangle_x|+\rangle_x}{\sqrt{2}}$.

Note que dada a invariância rotacional do estado singleto, tal estrutura se mantém para qualquer base.

A MQ mostra que duas quantidades físicas cujos operadores não comutam, $[\sigma_x, \sigma_z] \neq 0$, não podem ser definidas simultaneamente, pois o conhecimento de uma, exclui o conhecimento da outra. Baseado nessa afirmação e nas equações acima, considere que as partículas são enviadas a laboratórios distintos, A e B, localizados remotamente um do outro, de modo que operações realizadas localmente sobre uma partícula não podem influenciar a realidade da outra partícula. Aqui está a noção latente de realidade admitida por EPR. Em seguida, no laboratório A é realizada uma medição de spin na direção z que resulta em $+\hbar/2$. Consequentemente, através do colapso da função de onda, uma medição do spin da partícula localizada em B resultará em $-\hbar/2$. Agora, supomos que a medição de spin no laboratório A seja feita na direção x , resultando em $+\hbar/2$ o que faz, portanto, o resultado em B colapsar para $-\hbar/2$.

Assim, se em A mede-se σ_z , é possível prever σ_z em B com cem por cento de certeza; logo, pelo critério de EPR, há um elemento de realidade para σ_z . O mesmo vale para o caso em que mede-se σ_x . Como as partículas estão, em princípio, muito afastadas e não interagem mais, o que é feito no laboratório A não pode alterar a realidade no laboratório B. Dessa forma, ambos os elementos de realidade devem estar lá, simultaneamente, antes mesmo que se faça qualquer medição.

Após quase trinta anos, John S. Bell [16] provou que a teoria da MQ é incompatível com qualquer teoria física que considera a ideia de localidade [69]. Em um experimento tipo Bell, dois sistemas que interagiram previamente são enviados a laboratórios com separação do gênero espaço com o objetivo de serem medidos por dois observadores, Alice e Bob. Alice pode escolher medir sobre seu sistema uma dentre muitas possíveis medidas e consideramos que x denota a medida escolhida por ela. Igualmente, y representa a escolha de medida de Bob. Sendo as medições realizadas, elas fornecem resultados a e b nos dois sistemas. De um experimento para outro, os resultados a e b obtidos podem variar, mesmo quando as escolhas das medidas x e y são iguais.

Em geral, os resultados são governados por uma distribuição de probabilidade conjunta que pode depender, particularmente, do experimento que está sendo realizado. Realizando

o experimento um número suficiente de vezes, obtém-se uma estimativa de tais probabilidades.

Embora os dois sistemas possam estar separados por uma grande distância, a existência de correlações é verificada. Em particular, isso não necessariamente implica em algum tipo de influência direta de um sistema sobre o outro, pois essas correlações podem simplesmente revelar alguma relação de dependência entre os dois sistemas que foi estabelecida devido as interações prévias. Pelo menos é o que se poderia esperar de uma teoria local. Formalizaremos a ideia de teoria local mais precisamente no parágrafo seguinte.

O pressuposto de localidade implica que deveríamos ser capazes de identificar um conjunto de fatores passados, descritos por alguma variável oculta λ , que tem uma influência causal conjunta sobre ambos os resultados e que contém toda a informação sobre a relação de dependência entre a e b . Uma vez que todos os fatores são levados em conta, a interdependência entre os resultados deve ser descorrelacionada, ou seja,

$$p(ab|xy, \lambda) = p(a|x, \lambda)p(b|y, \lambda). \quad (2.47)$$

Essa hipótese afirma que encontramos uma explicação onde a probabilidade do resultado $a(b)$ depende apenas de λ e da medição local $x(y)$. A variável λ não necessariamente deve ser constante em todas as realizações do experimento já que λ envolve quantidades físicas que não são completamente controláveis. Portanto, os diferentes valores de λ durante as realizações do experimento devem ser caracterizados por uma distribuição de probabilidades $q(\lambda)$. Combinando isso com a Eq. (2.47), escrevemos

$$p(ab|xy) = \sum_{\lambda} q(\lambda)p(a|x, \lambda)p(b|y, \lambda), \quad (2.48)$$

sendo esta uma distribuição normalizada, $\sum_{\lambda} q(\lambda) = 1$. Essa equação representa precisamente a condição para a localidade no contexto dos experimentos de Bell.

No entanto, as previsões da MQ para certos experimentos envolvendo partículas emaranhadas não admitem uma decomposição na forma da Eq. (2.48). Para estabelecer este resultado, consideraremos por simplicidade um experimento em que há apenas duas escolhas de medida por observador, $x, y \in \{0, 1\}$, onde os possíveis resultados correspondem

apenas a dois valores, $a, b \in \{-1, 1\}$. Seja $\langle a_x b_y \rangle = \sum_{a,b} ab p(ab|xy)$ o valor esperado do produto ab para as escolhas de medida (x, y) e $S = \langle a_0 b_0 \rangle + \langle a_0 b_1 \rangle + \langle a_1 b_0 \rangle - \langle a_1 b_1 \rangle$ uma função das probabilidades $p(ab|xy)$. Se estas probabilidades satisfazem a condição de localidade, Eq. (2.48), necessariamente temos que

$$S = \langle a_0 b_0 \rangle + \langle a_0 b_1 \rangle + \langle a_1 b_0 \rangle - \langle a_1 b_1 \rangle \leq 2, \quad (2.49)$$

que é a conhecida desigualdade CHSH (Clauser, Horne, Shimony, Holt) [25].

Essa desigualdade pode ser derivada usando-se a condição de localidade, Eq. (2.48), na definição do valor esperado $\langle a_x b_y \rangle$, o que nos permite expressá-lo como a média $\langle a_x b_y \rangle = \sum_{\lambda} q(\lambda) \langle a_x \rangle_{\lambda} \langle b_y \rangle_{\lambda}$ do produto de valores esperados locais $\langle a_x \rangle_{\lambda} = \sum_a a p(a|x, \lambda)$ e $\langle b_x \rangle_{\lambda} = \sum_b b p(b|y, \lambda)$ tomando valores em $[-1, 1]$. Inserindo está expressão na Eq. (2.49), podemos escrever

$$S = \sum_{\lambda} q(\lambda) S_{\lambda},$$

com $S_{\lambda} = \langle a_0 \rangle_{\lambda} \langle b_0 \rangle_{\lambda} + \langle a_0 \rangle_{\lambda} \langle b_1 \rangle_{\lambda} + \langle a_1 \rangle_{\lambda} \langle b_0 \rangle_{\lambda} - \langle a_1 \rangle_{\lambda} \langle b_1 \rangle_{\lambda}$. Expressando $\langle a_0 \rangle_{\lambda}$ e $\langle a_1 \rangle_{\lambda}$ em evidência e uma vez que $\langle a_0 \rangle_{\lambda}, \langle a_1 \rangle_{\lambda} \in [-1, 1]$, temos que $S_{\lambda} \leq |\langle b_0 \rangle_{\lambda} + \langle b_1 \rangle_{\lambda}| + |\langle b_0 \rangle_{\lambda} - \langle b_1 \rangle_{\lambda}|$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\langle b_0 \rangle_{\lambda} \geq \langle b_1 \rangle_{\lambda} \geq 0$ o que fornece $S_{\lambda} = 2\langle b_0 \rangle_{\lambda} \leq 2$ e assim, $S = \sum_{\lambda} q(\lambda) S_{\lambda} \leq 2$.

Como exemplo, considere as previsões quânticas para um experimento em que os dois sistemas medidos por Alice e Bob são dois qubits no estado $|\psi\rangle = (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$, onde $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são autoestados de σ_z com autovalores ± 1 (aqui, por simplicidade, não vamos considerar autovalores $\pm \hbar/2$). Sejam as escolhas de medida $\{x, y\}$ associadas aos vetores \vec{x} e \vec{y} correspondendo às medições dos observáveis $\vec{x} \cdot \vec{\sigma}$ e $\vec{y} \cdot \vec{\sigma}$ no primeiro e segundo qubit respectivamente, onde $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ denota o vetor composto pelas matrizes de Pauli.

Segundo a MQ, temos os valores esperados $\langle a_x b_y \rangle = -\vec{x} \cdot \vec{y}$. Considere as configurações $x \in \{0, 1\}$ corresponderem a medições nas direções $\hat{e}_{1(2)}$ respectivamente, e as configurações $y \in \{0, 1\}$ a medições nas direções $-(\hat{e}_1 + \hat{e}_2)/\sqrt{2}$ e $(-\hat{e}_1 + \hat{e}_2)/\sqrt{2}$. Temos então que $\langle a_0 b_0 \rangle = \langle a_0 b_1 \rangle = \langle a_1 b_0 \rangle = 1/\sqrt{2}$ e $\langle a_1 b_1 \rangle = -1/\sqrt{2}$, o que fornece $S = 2\sqrt{2} > 2$, em contradição com desigualdade CHSH e consequentemente com a condição de localidade.

Portanto, o conteúdo do teorema de Bell evidencia o caráter não-local da teoria quân-

tica. A desigualdade CHSH é necessariamente satisfeita por qualquer modelo de variáveis ocultas que respeite a condição de localidade mostrada acima, porém é violada pelas previsões da teoria quântica.

As violações dessa desigualdade foram confirmadas experimentalmente pela primeira vez por Freedman e Clauser em 1972 [70], e mais tarde por Aspect, Grangier e Roger [19] de forma mais convincente em 1982. Mesmo assim, a validade de tais observações foi questionada devido a complexidade envolvida nas realizações experimentais, uma vez que era necessário garantir que não houvesse nenhuma forma de comunicação entre as partes envolvidas, de forma a eliminar todas as possíveis brechas (*loophole*) que poderiam permitir a contestação dos experimentos.

Recentemente, experimentos livres de brechas, como localidade e detecção, foram realizados por diferentes pesquisadores. Procedimentos envolvendo spins eletrônicos separados por 1,3 Km [20] e fótons emaranhados [22] obtiveram sucesso em mostrar que as correlações não-locais da teoria quântica medidas entre sistemas distantes não são consistentes com a hipótese de localidade. Mais resultados são apresentados nas referências [21, 23, 24].

Portanto, a MQ prevê corretamente através de violações nas desigualdades de Bell que a hipótese acima, Eq. (2.48), é inapropriada para descrever o mundo quântico, isto é, a natureza não é condizente com a ideia de localidade defendida por EPR e presente em teorias de variáveis locais. Dentro do contexto do formalismo adotado na MQ, a distribuição de probabilidade local para a parte \mathcal{A} é dada por $p(a|A, \lambda) = \text{Tr}(A_a \rho_\lambda^A)$, onde ρ_λ^A é um estado quântico em \mathcal{H}_A e A_a são projetores definindo a decomposição espectral $A = \sum_a a A_a$, com expressão similar para a parte \mathcal{B} . Sob esta restrição, a Eq. (2.48) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} p(ab|AB) &= \sum_{\lambda} q(\lambda) p(a|A, \lambda) p(b|B, \lambda) \\ &= \sum_{\lambda} q(\lambda) \text{Tr} \left[(A_a \otimes B_b) (\rho_\lambda^A \otimes \rho_\lambda^B) \right] \\ &= \text{Tr}(A_a \otimes B_b \rho_s), \end{aligned} \tag{2.50}$$

onde $\rho_s = \sum_{\lambda} q_{\lambda} \rho_{\lambda}^A \otimes \rho_{\lambda}^B$. Assim, se nos confinarmos estritamente à teoria quântica, é

garantido que a hipótese de localidade será satisfeita para todos os estados separáveis da forma ρ_s .

2.5.1 Emaranhamento

O emaranhamento é um dos efeitos mais formidáveis do mundo quântico. Sua natureza enigmática intrigou a comunidade científica por um longo tempo e agora é usada para realizar tarefas como processamento de informação quântica, computação quântica, teletransporte e criptografia quântica [31, 71, 72]. Estados emaranhados não podem ser preparados a partir de estados descorrelacionados por qualquer sequência de ações locais de Alice e Bob, mesmo com a ajuda da comunicação clássica, isto é, eles não podem ser criados por operações locais e comunicação clássica (*LOCC - local operations and classical communication*) [73].

Quando dois sistemas quânticos inicialmente separados são levados a interagir um com outro, eles perdem sua individualidade. Isso significa que não é mais possível expressar o estado de um sistema separadamente do outro, isto é, eles tornam-se emaranhados [74]. Em outras palavras, seja $|\psi\rangle$ um estado bipartido puro com espaço de Hilbert total $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Se o estado do sistema não puder ser escrito na forma separável, $|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$, o sistema é dito estar emaranhado. Já para o caso de estados mistos bipartidos, o estado do sistema é dito separável se puder ser escrito como

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i, \quad (2.51)$$

caso contrário, ele é emaranhado.

No que diz respeito a medidas de emaranhamento, pode-se dizer que uma boa medida desse recurso deve cumprir alguns requisitos, os quais são enumerados abaixo [75].

- a) Sendo ρ um estado separável, então o seu emaranhamento é nulo, $E(\rho) = 0$.
- b) O emaranhamento do estado ρ não pode aumentar sob LOCC.
- c) Normalização: Para um estado ρ maximamente emaranhado, o emaranhamento é dado por $E(\rho) = \ln d$, sendo d a dimensão do espaço de Hilbert.

- d) Continuidade: No limite em que tende a zero a distância entre dois estados, a diferença entre seus emaranhamentos deve tender a zero, isto é, $E(\rho) - E(\sigma) \rightarrow 0$ para $\|\rho - \sigma\| \rightarrow 0$.
- e) Subaditividade: O emaranhamento do produto tensorial dos estados ρ e σ não deve ser maior que a soma dos emaranhamentos de cada estado, $E(\rho \otimes \sigma) \leq E(\rho) + E(\sigma)$.
- f) Convexidade: A medida de emaranhamento deve ser uma função convexa, ou seja, $E(\lambda\rho + (1 - \lambda)\sigma) \leq \lambda E(\rho) + (1 - \lambda)E(\sigma)$ para $0 < \lambda < 1$.

Para um estado puro bipartido ρ atuando em $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, uma boa medida de emaranhamento é dada em termos da entropia de von Neumann do estado reduzido, onde $\rho_A = \text{Tr}_B \rho$ é o estado reduzido da partição \mathcal{A} , sendo ρ_B obtido de forma análoga. Essa medida é conhecida como entropia de emaranhamento

$$E(\rho) = S(\rho_A) = S(\rho_B), \quad (2.52)$$

sendo $E(\rho) = 0$ para estados separáveis e $0 < E(\rho) \leq \ln d$ para estados emaranhados onde d é a dimensão de $\mathcal{H}_{A(B)}$. Já no caso de estados mistos, algumas medidas conhecidas [76, 77] de emaranhamento são a concorrência, emaranhamento de formação, o custo de emaranhamento, entre outras que podem ser encontradas em detalhes na referência [75].

O emaranhamento é relacionado à não-localidade quântica através de violações das desigualdades de Bell, de modo que para se verificar correlações não-locais a partir de um estado quântico é necessário que o estado seja emaranhado [35, 69]. Em outras palavras, a presença de correlações não-locais implica na presença de emaranhamento. Especificamente, para qualquer estado puro emaranhado, é possível encontrar medições locais em que as correlações resultantes violem uma desigualdade de Bell, em particular, a desigualdade CHSH. Isso foi mostrado para o caso de estados de dois qubits [78] e para estados bipartidos com espaço de Hilbert de dimensão arbitrária [38].

Para o caso de estados mistos, Werner [39] descobriu em 1989 uma classe de estados mistos emaranhados que admitia um modelo de variável local de modo que as correlações resultantes não violavam nenhuma desigualdade de Bell. Tais estados são chamados de estados emaranhados Bell locais [26].

2.5.2 Direcionamento EPR

Ainda na primeira metade do século passado, Schrödinger [79, 80] publicou dois estudos abordando as relações de probabilidades entre sistemas separados, referindo-se ao contexto apontado por EPR. Dessa forma, Schrödinger introduziu um conceito conhecido como direcionamento EPR (*EPR steering*), o qual refere-se à capacidade que Alice possui, através de medições locais, de direcionar o estado de Bob de acordo com as medidas que ela escolhe realizar, dado que ambos compartilham um estado emaranhado. Essa correlação mostrou-se ser puramente quântica, uma vez que não é verificada para estados classicamente correlacionados.

Considere uma situação onde duas partículas que formam o estado singleto, Eq. (2.46), são enviadas cada uma para laboratórios remotamente separados. Uma vai para o laboratório de Alice e a outra para o laboratório de Bob. Na base de autoestados de σ_z , $\{|\pm\rangle\}$, se Alice escolhe medir o spin de sua partícula verificando que a mesma está no estado $|+\rangle$, ela saberá que o estado da partícula de Bob será $|-\rangle$, ou seja, Alice através de medições locais na sua parte do sistema é capaz de direcionar o sistema de Bob para uma dada realidade.

Por outro lado, se Alice escolhe fazer uma mudança de base em seu sistema, $\{|\pm\rangle_x\}$ por exemplo, ela não mais poderá estabelecer a realidade no sistema de Bob, pois independentemente do resultado que ela obtém, o estado de Bob será uma superposição de autoestados de σ_z sem realidade definida, isto é,

$$|s\rangle = -|+\rangle_x \left(\frac{|+\rangle - |-\rangle}{2} \right) + |-\rangle_x \left(\frac{|+\rangle + |-\rangle}{2} \right). \quad (2.53)$$

Nos últimos anos, vários critérios para identificar direcionamento EPR foram propostos e implementados experimentalmente. Recentemente, foi proposta uma medida baseada na máxima violação de desigualdades de direcionamento EPR para estados de dois qubits [81]. Além disso, ao direcionamento EPR foi dada uma interpretação operacional em um contexto no qual Alice quer convencer Bob, que não confia nela, que eles compartilham um estado emaranhado [82, 83]. Nesse cenário, esses trabalhos estabeleceram uma hierarquia segundo a qual o direcionamento EPR está entre o emaranhamento e a não-localidade

de Bell, o que significa que nem todo estado emaranhado é EPR-direcionável e nem todo estado EPR-direcionável é Bell não-local. Estados EPR-direcionáveis mostraram-se ser vantajosos em tarefas envolvendo geração aleatória [84], processamento da informação quântica [52] e processamento em distribuição de chaves quânticas [85].

2.5.3 Discórdia quântica

Duas expressões classicamente idênticas para a informação mútua geralmente diferem quando os sistemas envolvidos são quânticos. Essa diferença define o que é conhecido como discórdia quântica [86]. Presente mesmo em estados separáveis, a discórdia quântica caracteriza uma outra forma de correlação puramente quântica que é mais resistente à ação de canais de ruído [87, 88]. Sua existência foi demonstrada em dois trabalhos distintos publicados por Ollivier e Zurek [86] e por Henderson e Vedral [89].

Vimos na subseção 2.3.6 que dado um estado bipartido ρ_{AB} atuando em $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, a correlação total entre as partes \mathcal{A} e \mathcal{B} é medida pela informação mútua quântica, a qual pode ser obtida a partir das equações

$$I(\rho_{AB}) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) \quad (2.54)$$

e

$$J(\rho_{AB}) = S(\rho_A) - S(\rho_A|\rho_B) \quad (2.55)$$

sendo S a entropia de von Neumann e $S(\rho_A|\rho_B)$ a entropia condicional, que depende de qual observável medimos em \mathcal{B} . Dessa forma, ela é descrita abordando-se um conjunto de projetores de medição $\{B_b = |b\rangle\langle b|\}$, de modo que o estado do sistema dado que o resultado b foi obtido é

$$\rho_{A|b} = \frac{1}{p_b} (\mathbb{1}_A \otimes B_b) \rho_{AB} (\mathbb{1}_A \otimes B_b), \quad (2.56)$$

onde $p_b = \text{Tr}[(\mathbb{1}_A \otimes B_b) \rho_{AB} (\mathbb{1}_A \otimes B_b)]$ é a probabilidade de se obter a saída b e $\mathbb{1}_A$ é o operador identidade em \mathcal{A} .

As entropias $S(\rho_{A|b})$ ponderadas pelas probabilidades p_b fornecem a entropia de \mathcal{A}

condicionada às medições projetivas $\{B_b\}$. Assim, temos que

$$S(\rho_A|\{B_b\}) = \sum_b p_b S(\rho_{A|b}). \quad (2.57)$$

Dessa forma, a informação mútua quântica dada pela Eq. (2.55) é reescrita como

$$J(\rho_{AB}) = S(\rho_A) - S(\rho_{AB}|\{B_b\}). \quad (2.58)$$

A partir desta análise, podemos definir a medida de discórdia quântica como sendo a diferença entre as Eq.(2.54) e (2.58). Esta diferença, dada por

$$D(\rho_{AB}) = I(\rho_{AB}) - J(\rho_{AB}), \quad (2.59)$$

é uma quantidade assimétrica não-negativa que depende do conjunto de projetores de medição $\{B_b\}$. Essa dependência pode ser eliminada realizando-se um processo de minimização na equação acima sobre todas as possíveis medições, isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\rho_{AB}) &= \min_{\{B_b\}} [I(\rho_{AB}) - J(\rho_{AB})] \\ &= \min_{\{B_b\}} [S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) + S(\rho_A|\{B_b\})], \end{aligned} \quad (2.60)$$

o que corresponde a encontrar o observável cuja medição menos afeta o estado do sistema, além de permitir a extração máxima de informação sobre ρ_A . Ainda, uma versão simétrica da discórdia pode ser obtida por meio da entropia relativa quântica [31], estendendo-se o caso com medições apenas em ρ_A para o caso em que há medições nos dois subsistemas, como pode ser encontrado na referência [90], onde também é feita uma extensão para sistemas multipartidos.

2.6 REALIDADE E NÃO-LOCALIDADE DE CONTEXTO

A primeira tentativa conhecida de formalização da noção de realidade veio com a publicação do artigo de EPR em 1935. Neste trabalho seminal, os autores implementam através de um critério de realidade, por eles definido, uma condição que julgam como

suficiente para que haja realidade, isto é, para que um observável associado a uma quantidade física tenha realidade definida. Tal condição, associada à ideia de localidade, foi introduzida como parte de um raciocínio que visava mostrar que a teoria quântica não é uma teoria completa, pois seria incapaz de atestar realidade simultânea para observáveis incompatíveis.

Nesse cenário, como já discutido antes, Bohr confronta as ideias levantadas por EPR fazendo uso de seu princípio de complementaridade. Ele afirmava que a realidade para observáveis incompatíveis não podia ser simultaneamente estabelecida na mesma configuração experimental. Tais elementos de realidade para observáveis incompatíveis apenas poderiam ser estabelecidos por experimentos mutualmente excludentes. Contrapondo-se também ao argumento de EPR, Ruark [91] apontou que tais conclusões eram opostas à visão de muitos físicos teóricos da época, os quais afirmavam que uma propriedade física de um dado sistema só teria realidade estabelecida quando medida.

Segundo Vaidman [56], a maioria das definições de elementos de realidade possuem em comum a característica de serem associadas a resultados definidos por algum processo de medição. Dessa forma, ele propõe que os valores fracos, aqueles oriundos de medições fracas, sejam também identificados como elementos de realidade, ou seja, segundo a proposta de Vaidman não é necessário haver uma medição projetiva para que ocorra um elemento de realidade. Outros trabalhos, como propostos por Bruckner e Zeilinger [92], argumentam que um melhor entendimento da realidade física pode ser alcançado através do conceito de informação. Nessa linha de pensamento, a MQ é uma teoria elementar de informação e que, embora a informação não deva ser tomada como substituta da noção de realidade, elas ocupam o mesmo patamar.

Nas últimas décadas, os avanços conceituais relativos ao surgimento da realidade objetiva a partir do substrato quântico foram obtidos por meio de mecanismos como medições fracas [56], descoerência [93] e darwinismo quântico [94]. Recentemente, um protocolo operacional, descrito na Fig. 2.1, foi estabelecido a partir da premissa de que um observável torna-se real após ser medido [54]. Tal protocolo envolve preparação, medição não-revelada e tomografia de estado. Isso possibilitou a determinação de um quantificador do grau de irrealidade de um observável dado um estado quântico. Em outro trabalho recente, este

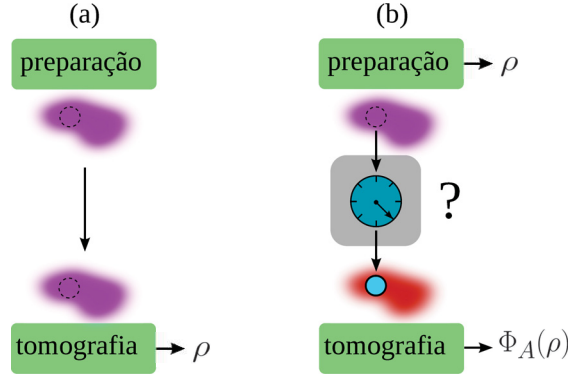


Figura 2.1: (a) A preparação ρ é determinada via tomografia. (b) Após a preparação, o observável A é medido pelo agente externo, tornando-se real antes da tomografia, a qual fornece o mapa $\Phi_A(\rho)$. Se $\Phi_A(\rho) = \rho$, então a medição apenas revela um elemento de realidade pré-existente. Figura retirada e adaptada da referência [54].

quantificador foi empregado para estabelecer formalmente relações entre os conceitos de medição, informação e realidade física, onde uma relação de complementaridade conecta a quantidade de informação associada ao aparato com o grau de irrealidade do observável monitorado [55].

A medida de irrealidade adotada em [54] é definida segundo o protocolo acima para um estado quântico multipartido ρ . Para isso, considere que temos a tarefa de determinar, via tomografia de estado, a descrição mais completa para o estado ρ . Por tomografia entende-se como sendo a estimação de um estado quântico desconhecido a partir de medições realizadas sobre uma coleção de sistemas quânticos identicamente preparados no mesmo estado desconhecido [95]. É permitido repetir o processo quantas vezes forem necessárias de modo que ao final do procedimento seja possível afirmar que o estado quântico, a cada preparação, é formalmente descrito pelo operador densidade ρ , Fig. 2.1 (a).

Em um segundo cenário, Fig. 2.1 (b), é proposto obter também uma descrição completa do estado do sistema, mas considerando que o observável $A = \sum_a a A_a$, com projetores $A_a = |a\rangle\langle a|$ atuando em \mathcal{H}_A , seja secretamente medido por um agente externo entre a preparação e o processo tomográfico. A teoria quântica prevê que o estado do sistema irá colapsar para $A_a \otimes \rho_{\mathcal{B}|a}$ com probabilidade p_a , após a medição ser realizada, onde $\rho_{\mathcal{B}|a} = \text{Tr}_A(A_a \rho A_a) / p_a$ é o estado do resto do sistema dado o autovalor a e $p_a = \text{Tr}(A_a \rho A_a)$ é a probabilidade associada a esse autovalor. Sem qualquer informação sobre a medição

feita pelo agente externo, a melhor descrição após a tomografia deve ser

$$\Phi_A(\rho) \equiv \sum_a A_a \rho A_a = \sum_a p_a A_{ak} \otimes \rho_{B|a}, \quad (2.61)$$

que coincide com a descrição que usamos anteriormente para um medição projetiva não-revelada.

Pelo critério EPR, o agente tem certeza que o observável A é real após cada medição realizada. Note que a descrição dada pela Eq. (2.61), apenas representa o conhecimento de uma realidade subjacente a A , enquanto que a probabilidade p_a reflete nossa ignorância subjetiva sobre o real valor desse observável. Quando $\Phi_A(\rho) = \rho$, concluímos que um elemento de realidade para A já estava determinado após a preparação experimental inicial, portanto, nesse caso, a medição não define uma realidade, apenas revela algo pré-existente. Isto sugere o seguinte critério de realidade.

Definição (Elemento de realidade). *Um observável $A = \sum_a a A_a$, com projetores $A_a = |a\rangle\langle a|$ em \mathcal{H}_A , é real para uma preparação ρ atuando em $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, onde $\mathcal{H}_B = \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{H}_i$ se e somente se*

$$\Phi_A(\rho) = \rho. \quad (2.62)$$

O critério acima induz, naturalmente, uma medida de quanto um estado ρ está de um estado no qual A é real. Dessa forma, Bilobran e Angelo [54] definiram a irrealidade de um observável A dada a preparação ρ em \mathcal{H} como a distância entrópica

$$\mathfrak{S}(A|\rho) := S(\Phi_A(\rho)) - S(\rho), \quad (2.63)$$

onde $S(\rho)$ é a entropia de von Neumann. Como medidas projetivas não reduzem a entropia [31], essa medida é não-negativa, ou seja, $\mathfrak{S}(A|\rho) \geq 0$. A igualdade ocorre somente se $\Phi_A(\rho) = \rho$, isto é, quando vale o critério mostrado na Eq. (2.62). Um outro ponto a ser notado é que essa medida depende não somente do estado, mas também do observável medido. Por exemplo, considere um estado $|\phi\rangle = |+\rangle$, um autoestado de σ_z . Nesse caso, vale o critério de realidade (2.62), portanto $\mathfrak{S}(\sigma_z||\phi\rangle) = 0$, pois o estado $|\phi\rangle$ é um autoestado do observável em questão, o qual já tem realidade definida logo após sua preparação.

Por outro lado, se considerarmos a base de autoestados de σ_x , o estado $|\phi\rangle$ torna-se um estado de superposição, ou seja, $|\phi\rangle = (|+\rangle_x + |-\rangle_x)/\sqrt{2}$. Logo, de acordo com a definição (2.63), temos que $\mathfrak{S}(\sigma_x||\phi\rangle) = S(\Phi_{\sigma_x}(|\phi\rangle)) - S(|\phi\rangle)$. Como $|\phi\rangle$ é um estado puro, segue que $S(|\phi\rangle) = 0$, enquanto que $\Phi_{\sigma_x}(|\phi\rangle) = (|+\rangle_x\langle+| + |-\rangle_x\langle-|)/2$ fornece

$$\mathfrak{S}(\sigma_x||\phi\rangle) = S(\Phi_{\sigma_x}(|\phi\rangle)) = -2 \left(\frac{1}{2}\right) \ln \left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2. \quad (2.64)$$

Isso nos mostra que para uma mesma preparação para a qual existe um observável que é real, e conseqüentemente possui irrealidade nula, pode haver outro observável que apresente $\mathfrak{S} > 0$ conforme verificamos no caso da superposição de autoestados de σ_x .

Partindo da definição de irrealidade, surge naturalmente uma noção de não-localidade associada à intervenções remotas dada uma preparação ρ , a não-localidade de contexto. A ideia proposta por Bilobran e Angelo consiste em investigar se ocorrem alterações na irrealidade de um observável através de medições feitas em outra localidade espacialmente separada da primeira. Esse conceito de não-localidade é diferente da não-localidade de Bell, a qual é vinculada à violações do conceito de causalidade local, conforme vimos nas seções antecedentes.

Aqui, podemos entender o surgimento desta não-localidade considerando um típico cenário EPR, no qual dois sistemas são preparados em um estado ρ atuando em $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Posteriormente, os sistemas são separados e enviados para laboratórios diferentes, localizados remotamente um do outro. Considere também um observável $B = \sum_b b B_b$ com projetores $B_b = |b\rangle\langle b|$ e o sistema auxiliar $\rho_x = |x_0\rangle\langle x_0|$ atuando em \mathcal{H}_X que interage localmente com uma parte do sistema através de uma transformação unitária do tipo $U_{BX}|b\rangle|x_0\rangle = |b\rangle|x_b\rangle$. Dessa forma, após a interação, o estado global do sistema é descrito por $\mathcal{E}(\rho) = U_{BX}(\rho \otimes \rho_x)U_{BX}^\dagger$. Em seguida, é proposta a seguinte medida de não-localidade

$$\eta(\rho) = \mathfrak{S}(A|\rho) - \mathfrak{S}(A|\text{Tr}_X \mathcal{E}(\rho)), \quad (2.65)$$

a qual revela a ocorrência de alterações na irrealidade de A devido à interação ocorrida remotamente. Ao efetuarmos a operação de traço parcial mostrada na Eq. (2.65),

encontramos

$$\text{Tr}_{\mathcal{X}} \mathcal{E}(\rho) = \sum_k \langle x_k | U_{\mathcal{BX}} (\rho \otimes |x_0\rangle\langle x_0|) U_{\mathcal{BX}}^\dagger | x_k \rangle = \sum_k \langle x_k | U_{\mathcal{BX}} | x_0 \rangle \rho \langle x_0 | U_{\mathcal{BX}}^\dagger | x_k \rangle = \Phi_B(\rho),$$

que é uma aplicação do teorema de Stinespring [31], de modo que $\Phi_B(\rho)$ representa o estado do sistema dado que o observável B foi medido remotamente. Portanto, através desse resultado, podemos escrever

$$\eta_{AB}(\rho) = \mathfrak{I}(A|\rho) - \mathfrak{I}(A|\Phi_B(\rho)), \quad (2.66)$$

sendo esta a não-localidade para o contexto (A, B, ρ) . Essa medida acusa uma diferença na irrealidade de A depois que o observável B foi medido no local remoto, dado um estado ρ . É justamente essa diferença de irrealidades que indica a presença de não-localidade revelada de forma totalmente diferente daquela baseada na hipótese de causalidade local, Eq. (2.48). Em termos da entropia de von Neumann, a Eq. (2.66) se mostra invariante sob troca de índices $A \rightleftharpoons B$, isto é,

$$\eta_{AB}(\rho) = S(\Phi_A(\rho)) + S(\Phi_B(\rho)) - S(\Phi_{AB}(\rho)) - S(\rho), \quad (2.67)$$

o que nos diz que o resultado será o mesmo se nos questionarmos sobre alterações na irrealidade de B via medições não-reveladas em A . Além disso, $\eta_{AB}(\rho) = 0$ para estados descorrelacionados, $\rho = \rho_A \otimes \rho_B$ e para estados que satisfazem o critério de realidade ($\rho = \Phi_{A(B)}(\rho)$) dado pela Eq. (2.62).

Ainda em relação à referência [54], foi implementado pelos autores um processo de minimização para a não-localidade de contexto. Esse procedimento permite avaliar uma quota inferior para essa noção de não-localidade que refere-se a uma propriedade intrínseca apenas do estado ρ . Matematicamente o processo é definido por

$$N_{\min}(\rho) := \min_{A,B} \eta_{AB}(\rho), \quad (2.68)$$

onde a minimização é realizada sobre todos os pares de observáveis (A, B) . Note que essa medida depende apenas do estado ρ considerado, de modo que, se for verificado que

$N_{\min}(\rho) > 0$, então não haverá par de observáveis capazes de acusar ausência de não-localidade. Além disso, é mostrado que essa medida possui uma conexão com a discórdia global[90] através do teorema seguinte.

Teorema. *Para qualquer preparação ρ atuando em $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, é verdade que $0 \leq N_{\min}(\rho) \leq \mathcal{D}_{AB}(\rho)$. Em particular, se ρ é um estado puro, então $N_{\min}(\rho) = 0$.*

Para provar o teorema acima, vamos considerar a irrealidade do observável A dada a preparação ρ . Primeiramente, note que $\rho_B = \text{Tr}_A \rho = \sum_{a'} \langle a' | \rho | a' \rangle$ de modo que $\Phi_A(\rho_B) = \rho_B$. Note ainda que podemos somar e subtrair termos em $\mathfrak{I}(A|\rho)$, de modo a obter $\mathfrak{I}(A|\rho) = S(\Phi_A(\rho)) - S(\rho) + [S(\Phi_A(\rho_A)) - S(\Phi_A(\rho_A))] + [S(\rho_A) - S(\rho_A)] + [S(\rho_B) - S(\Phi_A(\rho_B))]$. Após rearranjarmos os termos, encontramos

$$\mathfrak{I}(A|\rho) = \mathfrak{I}(A|\rho_A) + D_{[A]}(\rho), \quad (2.69)$$

sendo $D_{[A]}(\rho) = I_{A:B}(\rho) - I_{A:B}(\Phi_A(\rho))$ uma medida do tipo discórdia, a menos de uma minimização. Na equação acima, $\mathfrak{I}(A|\rho_A)$ pode ser vista como uma medida de irrealidade local. A partir das Eqs. (2.66) e (2.69) pode ser mostrado que

$$\eta_{AB}(\rho) = D_{[A]}(\rho) + D_{[B]}(\rho) - D_{[AB]}(\rho),$$

onde $D_{[AB]}(\rho) = I_{A:B}(\rho) - I_{A:B}(\Phi_{AB}(\rho))$. Da não-negatividade da discórdia quântica \mathcal{D}_k segue que $I_{A:B}(\rho) \geq I_{A:B}(\Phi_R(\rho))$, $R = A, B$. Fazendo a substituição $\rho \rightarrow \Phi_R(\rho)$ obtemos as desigualdades $I_{A:B}(\Phi_R(\rho)) \geq I_{A:B}(\Phi_{AB}(\rho))$ e

$$I_{A:B}(\Phi_A(\rho)) + I_{A:B}(\Phi_B(\rho)) \geq 2I_{A:B}(\Phi_{AB}(\rho)). \quad (2.70)$$

Em seguida, reescrevendo $I_{A:B}$ em termos da medidas tipo discórdia D , verificamos a relação $\eta_{AB}(\rho) = D_{[A]} + D_{[B]} - D_{[AB]} \leq D_{[AB]}$, que após o processo de minimização, fornece

$$N_{\min}(\rho) \leq \mathcal{D}_{AB}(\rho). \quad (2.71)$$

Veja que este limite superior revela uma hierarquia semelhante àquela verificada entre emaranhamento e não-localidade de Bell. Em relação à classe de hierarquia entre recursos

quânticos, abordaremos no capítulo seguinte uma discussão abrangendo todos os recursos conhecidos. Voltando à Eq. (2.71), no caso em que $\mathcal{D}_{\mathcal{AB}}(\rho) = 0$, é dito que haverá um par de observáveis para o qual não serão observados aspectos não-locais.

A prova do limite inferior é obtida considerando-se o estado quadripartido $\sigma_0 = \rho \otimes \rho_{\mathcal{X}} \otimes \rho_{\mathcal{Y}}$, onde ρ atua em $\mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$, $\rho_{\mathcal{X}} = |x_0\rangle\langle x_0|$ atua em $\mathcal{H}_{\mathcal{X}}$ e $\rho_{\mathcal{Y}} = |y_0\rangle\langle y_0|$ atua em $\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}$. $A = \sum_a a|a\rangle\langle a|$, $B = \sum_b b|b\rangle\langle b|$ são observáveis atuando em $\mathcal{H}_{\mathcal{A}(\mathcal{B})}$ e $U = (U_{\mathcal{AX}} \otimes U_{\mathcal{BY}})$ é uma transformação unitária tal que $\sigma = U\sigma_0U^\dagger$, $U_{\mathcal{AX}}|a\rangle|x_0\rangle = |a\rangle|x_a\rangle$ e $U_{\mathcal{BY}}|b\rangle|y_0\rangle = |b\rangle|y_b\rangle$, onde

$$\sigma = \sum_{a,b} \sum_{a',b'} \langle ab | \rho | a'b' \rangle |a\rangle\langle a'| \otimes |b\rangle\langle b'| \otimes |x_a\rangle\langle x_{a'}| \otimes |y_b\rangle\langle y_{b'}|, \quad (2.72)$$

a partir do qual obtemos

$$\sigma_{\mathcal{ABX}} = \text{Tr}_{\mathcal{Y}} \sigma = U_{\mathcal{AX}} [\Phi_B(\rho) \otimes \rho_{\mathcal{X}}] U_{\mathcal{AX}}^\dagger, \quad (2.73)$$

$$\sigma_{\mathcal{ABY}} = \text{Tr}_{\mathcal{X}} \sigma = U_{\mathcal{BY}} [\Phi_A(\rho) \otimes \rho_{\mathcal{Y}}] U_{\mathcal{BY}}^\dagger \quad (2.74)$$

e

$$\sigma_{\mathcal{AB}} = \text{Tr}_{\mathcal{XY}} \sigma = \sum_{a,b} \langle ab | \rho | ab \rangle |ab\rangle\langle ab| = \Phi_{\mathcal{AB}}(\rho). \quad (2.75)$$

Em seguida, aplicando as propriedades de aditividade e de invariância unitária da entropia de von Neumann, obtemos que

$$S(\sigma) = S(U\sigma_0U^\dagger) = S(\sigma_0) = S(\rho \otimes \rho_{\mathcal{X}} \otimes \rho_{\mathcal{Y}}) = S(\rho), \quad (2.76)$$

$$S(\sigma_{\mathcal{ABX}}) = S(U_{\mathcal{AX}} [\Phi_B(\rho) \otimes \rho_{\mathcal{X}}] U_{\mathcal{AX}}^\dagger) = S(\Phi_B(\rho)), \quad (2.77)$$

$$S(\sigma_{\mathcal{ABY}}) = S(U_{\mathcal{BY}} [\Phi_A(\rho) \otimes \rho_{\mathcal{Y}}] U_{\mathcal{BY}}^\dagger) = S(\Phi_A(\rho)) \quad (2.78)$$

e

$$S(\sigma_{\mathcal{AB}}) = S(\Phi_{\mathcal{AB}}(\rho)). \quad (2.79)$$

Sendo $\eta_{\mathcal{AB}}(\rho) = S(\Phi_A(\rho)) + S(\Phi_B(\rho)) - S(\Phi_{\mathcal{AB}}(\rho)) - S(\rho)$ e considerando $\mathcal{I} = \mathcal{X}$, $\mathcal{J} = \mathcal{Y}$, $\mathcal{K} = \mathcal{AB}$ e as relações $S(\rho_{\mathcal{IJK}}) = S(\rho)$, $S(\rho_{\mathcal{K}}) = S(\Phi_{\mathcal{AB}}(\rho))$, $S(\rho_{\mathcal{IK}}) = S(\Phi_B(\rho))$ e

$S(\rho_{\mathcal{JK}}) = S(\Phi_A(\rho))$, a subaditividade forte da entropia de von Neumann fornece

$$\begin{aligned} S(\rho_{\mathcal{IK}}) + S(\rho_{\mathcal{K}}) &\leq S(\rho_{\mathcal{IK}}) + S(\rho_{\mathcal{JK}}) \\ S(\rho) + S(\Phi_{AB}(\rho)) &\leq S(\Phi_B(\rho)) + S(\Phi_A(\rho)). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Portanto, $\eta_{AB}(\rho) \geq 0$ para o contexto (A, B, ρ) . Consequentemente, temos após a minimização que $N_{\min}(\rho) \geq 0$.

2.7 ESTADOS DE DOIS QUBITS

Utilizamos ao longo deste trabalho sistemas bipartidos como objetos de estudo para os nossos propósitos. Estados de dois qubits são considerados como blocos de construção para codificar correlações entre sistemas quânticos [96]. Considere um sistema de dois qubits com espaço de Hilbert $\mathcal{C}^2 \otimes \mathcal{C}^2$ e base computacional $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$. Segundo [60, 96], qualquer estado de dois qubits pode ser escrito como

$$\gamma = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}_{\mathcal{A}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{B}} + \vec{u} \cdot \vec{\sigma}_{\mathcal{A}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{B}} + \mathbb{1}_{\mathcal{A}} \otimes \vec{v} \cdot \vec{\sigma}_{\mathcal{B}} + \sum_{j,k=1}^3 w_{jk} \sigma_j \otimes \sigma_k \right), \quad (2.81)$$

onde $\mathbb{1}_{\mathcal{A}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{B}}$ é o operador identidade do sistema global, enquanto $\mathbb{1}_{\mathcal{A}(\mathcal{B})}$ são os operadores identidades dos sistemas \mathcal{A} e \mathcal{B} . Além disso, $\vec{\sigma}$ é um vetor cujas componentes $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ são as matrizes de spin de Pauli nas direções x, y, z , os vetores unitários $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ e os termos w_{jk} são números reais que denotam os elementos da matriz $W = \{w_{jk}\}$.

Acordando com o teorema da decomposição de valor singular, a matriz W pode ser escrita como $W = O^A \text{diag}\{c_1, c_2, c_3\} O^B$ ou, de forma equivalente, como

$$\sum_{j,k=1}^3 O_{jm}^A w_{jk} O_{nk}^B = \delta_{mn} c_m, \quad (2.82)$$

onde $O^A = \{O_{jm}^A\}$ e $O^B = \{O_{nk}^B\}$ são matrizes ortogonais em $O(3)$. Ainda, sempre existem matrizes unitárias U e V em $U(2)$ tal que $U \sigma_j U^\dagger = \sum_{m=1}^3 O_{jm}^A \sigma_m$ e $V \sigma_k V^\dagger = \sum_{n=1}^3 O_{nk}^B \sigma_n$ [60].

Tomando $\vec{\alpha} = \vec{u}O^A$, $\vec{\beta} = \vec{v}(O^B)^T$ e notando que

$$\begin{aligned}
 U \otimes V \left(\sum_{j,k=1}^3 w_{jk} \sigma_j \otimes \sigma_k \right) U^\dagger \otimes V^\dagger &= \sum_{j,k=1}^3 w_{jk} (U \sigma_j U^\dagger) \otimes (V \sigma_k V^\dagger) \\
 &= \sum_{m,n=1}^3 \left(\sum_{j,k=1}^3 w_{jk} O_{jm}^A O_{nk}^B \right) \sigma_m \otimes \sigma_n \\
 &= \sum_{m=1}^3 c_m \sigma_m \otimes \sigma_m,
 \end{aligned} \tag{2.83}$$

sendo o estado γ localmente equivalente a

$$\rho = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}_{\mathcal{A}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{B}} + \vec{u} \cdot \vec{\sigma}_{\mathcal{A}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{B}} + \mathbb{1}_{\mathcal{A}} \otimes \vec{v} \cdot \vec{\sigma}_{\mathcal{B}} + \sum_{j=1}^3 c_j \sigma_j \otimes \sigma_j \right). \tag{2.84}$$

Portanto, todo estado geral de dois qubits pode ser reduzido através de transformações unitárias locais a um estado como o da equação acima. Em muitos casos, mostra-se que as correlações quânticas contidas no estado acima são precisamente as mesmas que estão codificadas no estado matematicamente mais simples,

$$\rho = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}_{\mathcal{A}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{B}} + \sum_{j=1}^3 c_j \sigma_j \otimes \sigma_j \right), \tag{2.85}$$

onde c_j são constantes reais que satisfazem a restrição $\lambda \in [0, 1]$, sendo λ os autovalores do estado ρ dado pela Eq. (2.85).

Um exemplo de estados de dois qubits de grande interesse foi proposto por Werner [39] em 1989. Trata-se de uma soma convexa entre um estado maximamente emaranhado e um estado maximamente misturado, qual seja

$$\rho_\mu = (1 - \mu) \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{A}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{B}}}{4} + \mu |s\rangle \langle s|, \tag{2.86}$$

onde $|s\rangle = \frac{|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle}{\sqrt{2}}$ é o estado singleto e $\mu \in [0, 1]$ é um parâmetro que mede a fidelidade ao estado puro. Tal estado é separável para $\mu \leq 1/3$, logo não viola nenhuma desigualdade de Bell neste domínio e é emaranhado para $\mu > 1/3$. Além disso, para $\mu > 1/\sqrt{2}$, o estado ρ_μ leva a violações da desigualdade CHSH como foi estabelecido por

Horodecki *et al* [97].

Ademais, Werner mostrou que as correlações resultantes de medições projetivas admitem um modelo local se $\mu \leq 1/2$, mesmo sendo este estado emaranhado para $\mu > 1/3$, de modo que estados emaranhados que admitem um modelo local são conhecidos como *estados locais*. É possível obter o estado de Werner a partir da Eq. (2.85) considerando-se o caso particular $c_1 = c_2 = c_3 = -\mu$, o que pode ser verificado notando-se que na base computacional este caso fornece a mesma matriz que a Eq. (2.86).

Este capítulo foi voltado para a descrição dos conceitos teóricos necessários para o desenvolvimento dos resultados exibidos na presente tese. No capítulo seguinte, baseados em todo o conteúdo discutido até aqui, apresentaremos nossos primeiros resultados.

3 NÃO-LOCALIDADE BASEADA EM REALISMO

Ao contrário do quadro de quantificação de emaranhamento que identifica um conjunto de critérios necessários a serem satisfeitos e conta com muitas medidas bem estabelecidas em diferentes conjunturas [72, 75], a pesquisa sobre quantificação de não-localidade conta com poucos cenários. Algumas abordagens conhecidas envolvem máximas violações das desigualdades de Bell [26], resistência ao ruído [98, 99], performances em tarefas de comunicação [49–51], o volume de violação [53] e, mais recentemente, o uso da distância traço [100]. Falaremos a seguir daquelas mais relevantes para o desenvolvimento da presente tese e, em seguida, apresentaremos a definição de não-localidade baseada (NBR) em realismo e a discussão fomentada por essa noção de não-localidade cuja natureza difere da não-localidade de Bell.

3.1 QUANTIFICAÇÃO DE NÃO-LOCALIDADE

No primeiro caso, Costa *et al* [26] consideram um cenário envolvendo sistemas de dois qubits, onde a desigualdade CHSH é definida como

$$B(\rho, \mu) := |\text{Tr}(\rho B_{CHSH})| \leq 2, \quad (3.1)$$

onde $B_{CHSH} = \hat{a}_1 \cdot \vec{\sigma}_A \otimes (\hat{b}_1 + \hat{b}_2) \cdot \vec{\sigma}_B + \hat{a}_2 \cdot \vec{\sigma}_A \otimes (\hat{b}_1 - \hat{b}_2) \cdot \vec{\sigma}_B$ é o operador de Bell atuando em $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, envolvendo as configurações μ de medida de Alice e Bob, dadas pelos vetores unitários $\hat{a}_{1(2)}$ e $\hat{b}_{1(2)}$ e sendo $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ as matrizes de Pauli.

Esse operador é concebido de forma a garantir que a desigualdade acima, Eq. (3.1), seja satisfeita para qualquer estado ρ descrito por um modelo de variáveis ocultas locais. Através de uma maximização sobre todas as configurações μ de medida é possível maximizar $B(\rho, \mu)$ e consequentemente a não-localidade. Escolhendo uma normalização conveniente, o quantificador de não-localidade de Bell é definido como

$$N(\rho) := \max \left\{ 0, \frac{B(\rho) - 2}{B_{\max}(\rho) - 2} \right\}, \quad (3.2)$$

onde $B(\rho) := \max_{\mu} B(\rho, \mu)$, $B(\rho) \leq B_{\max}(\rho) = 2\sqrt{2}$ e $N(\rho) \in [0, 1]$. Usando esta quantidade, os autores obtiveram fórmulas analíticas fechadas para uma classe de estados de dois qubits conhecidos como estados X, Eq. (2.85). A ideia básica por trás de tal definição é classificar como mais não-locais, aqueles estados que mais violam a desigualdade CHSH e, portanto, teriam, em princípio, mais recursos não-locais persistentes quando submetidos a canais de ruído.

Um outro trabalho encontrado na literatura aponta para o fato de emaranhamento e não-localidade serem recursos distintos. Uma clara ilustração disso é a existência de estados que são maximamente emaranhados, mas que não violam maximamente uma desigualdade de Bell. Esse fato é conhecido como anomalia de não-localidade e foi originalmente reportado por Acín, Gisin, Latorre [40].

Nessa direção, um artigo recente [53] sugere evidências de que esta anomalia pode ser uma consequência das medidas usadas para quantificar a não-localidade. Para mostrar isso, os autores definem o volume de violação V como sendo uma integração sobre a configuração de parâmetros experimentais que podem ser varridos dentro do contexto de uma dada desigualdade de Bell.

Para formalizar esta ideia, foi definido o espaço $\chi = \{x_1, \dots, x_n\}$ de todos os possíveis parâmetros que determinam as configurações para uma dada desigualdade de Bell. Para um estado ρ em particular, seja $\Gamma_p \subset \chi$ o conjunto de pontos que leva à violação e seja $V(\rho)$ proporcional ao volume de Γ_p . É dito que se $V(\rho) > V(\sigma)$, então ρ é mais não-local que σ , com

$$V(\rho) \equiv \frac{1}{K} \int_{\Gamma_p} d^n x, \quad (3.3)$$

onde K é uma constante de normalização.

Considere uma família de estados puros de dois sistemas de três níveis, isto é, dois qutrits emaranhados

$$|\psi_{\gamma}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2+\gamma^2}} (|00\rangle + \gamma|11\rangle + |22\rangle),$$

sendo $|\psi_{\gamma}\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ com $\dim \mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_2 = 3$ e sendo $\{|0\rangle_i, |1\rangle_i, |2\rangle_i\}$ uma base ortonormal em \mathcal{H}_i ($i = 1, 2$). Uma particularidade desse estado é que ele é maximamente emaranhado para $\gamma = 1$, enquanto o mesmo viola maximamente a desigualdade CGLMP

para $\gamma \approx 0.792$, uma desigualdade de Bell desenvolvida por Collins *et al* [101] para sistemas quânticos bipartidos com dimensão $d \geq 2$. Isso significa que a violação máxima da desigualdade de Bell não ocorre para o estado maximamente emaranhado. Porém, quando aplicado o volume de violação, o emaranhamento máximo ocorre com γ para o qual V também é máximo, mostrando que a anomalia de não-localidade deixa de existir. Nesse contexto, dados dois estados ρ e σ , pode-se afirmar que o primeiro é mais não-local se viola a localidade causal, não importando por qual extensão, para um número de configurações experimentais maior que o último.

Diferentemente das propostas de quantificação da não-localidade discutidas acima, propusemos um quantificador de não-localidade que foge do contexto das desigualdades de Bell. Como veremos a seguir, ele é baseado na noção de irrealidade discutida no capítulo 2. O critério de realidade apresentado na referência [54] concorda com EPR em situações envolvendo projetores, mas também é capaz de fornecer um diagnóstico para o caso de estados mistos.

Tal protocolo, como discutido e ilustrado no capítulo anterior (Fig. 2.1), é apresentado para estados multipartidos, porém aqui consideraremos apenas situações envolvendo estados com duas partições. A partir do conceito de irrealidade é proposta uma noção de não-localidade baseada em alterações da realidade de um observável A através de perturbações físicas ocorrendo remotamente na outra parte do sistema.

Vale ressaltar que, diferentemente da não-localidade de Bell, que deriva de violações da hipótese de causalidade local, o critério adotado aqui para a não-localidade em um contexto definido por (A, B, ρ) depende de uma noção de realismo que é formalmente caracterizada pela medida de irrealidade \mathfrak{S} .

3.2 QUANTIFICANDO A NBR

Inspirados pelo critério de realidade discutido acima para a não-localidade de contexto (A, B, ρ) , pretendemos introduzir uma medida da quantidade de NBR associada unicamente ao estado do sistema, o qual é descrito pelo operador densidade ρ . Para esta finalidade, tomamos como quantificador da não-localidade baseada em realismo, o objeto

$N_{\text{br}}(\rho)$, o qual é definido como a maximização de $\eta_{AB}(\rho)$, Eq. (2.67), sobre todas as possíveis escolhas de observáveis A e B atuando nos espaços \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , respectivamente, isto é,

$$N_{\text{br}}(\rho) := \max_{A,B} \eta_{AB}(\rho), \quad (3.4)$$

sendo $N_{\text{br}}(\rho) \geq 0$, o que segue diretamente da não-negatividade da não-localidade de contexto, $\eta_{AB}(\rho) \geq 0$, cuja demonstração se encontra em detalhes no capítulo anterior.

Afirmamos que a motivação por trás dessa definição, Eq. (3.4), é dupla. Primeiro, ela implementa a intuição segundo a qual um estado que permite maiores mudanças na realidade de um observável em um sítio \mathcal{A} devido à ações remotas em um sítio \mathcal{B} deve ser mais não-local. Segundo, $N_{\text{br}}(\rho)$ é tanto condição suficiente quanto necessária para a presença de não-localidade baseada em realismo, pois se $N_{\text{br}}(\rho) = 0$, então não existe contexto (A, B, ρ) onde a irrealidade possa mudar, enquanto que se $N_{\text{br}}(\rho) > 0$, então com certeza há pelo menos um contexto onde a irrealidade deve mudar.

Na verdade, existe um terceira e mais importante razão de porque tal definição é interessante. A não-localidade baseada em realismo é *não-anômala*, N_{br} não leva a nenhuma anomalia de não-localidade, isto é, um estado maximamente emaranhado como $|\Psi_d\rangle = \sum_{i=1}^d |i\rangle|i\rangle/\sqrt{d}$ é também maximamente não-local para todo d .

Mais especificamente, como provaremos agora, $N_{\text{br}}(\varrho)$ se reduz à entropia de emaranhamento quando $\varrho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Para começar, vamos escrever a não-localidade de contexto em termos da entropia de von Neumann,

$$\eta_{AB}(\varrho) = S(\Phi_A(\varrho)) + S(\Phi_B(\varrho)) - S(\Phi_{A,B}(\varrho)) - S(\varrho), \quad (3.5)$$

onde $\Phi_{A,B}(\varrho) := \Phi_A(\Phi_B(\varrho)) = \Phi_B(\Phi_A(\varrho))$. Pela desigualdade de Klein [31], pode-se mostrar que $S(\Phi_A(\varrho)) \geq S(\varrho)$ e também que $S(\Phi_{A,B}(\varrho)) \geq S(\Phi_R(\varrho))$ com R assumindo A ou B , onde a igualdade vale para $\Phi_{A,B}(\varrho) = \Phi_R(\varrho)$. Note que a partir da segunda desigualdade podemos escrever

$$2S(\Phi_{A,B}(\varrho)) \geq S(\Phi_A(\varrho)) + S(\Phi_B(\varrho)), \quad (3.6)$$

onde a igualdade ocorre para $\Phi_{A,B}(\varrho) = \Phi_A(\varrho) = \Phi_B(\varrho)$. Isolando $S(\Phi_{A,B}(\varrho))$ na Eq. (3.5)

e substituindo na Eq. (3.6), encontramos

$$\begin{aligned}
2(S(\Phi_A(\varrho)) + S(\Phi_B(\varrho)) - S(\varrho) - \eta_{AB}(\varrho)) &\geq S(\Phi_A(\varrho)) + S(\Phi_B(\varrho)) \\
S(\Phi_A(\varrho)) + S(\Phi_B(\varrho)) - S(\varrho) - S(\varrho) &\geq 2\eta_{AB}(\varrho) \\
\eta_{AB}(\varrho) &\leq \frac{\mathfrak{S}(A|\varrho) + \mathfrak{S}(B|\varrho)}{2}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Para o caso de estados puros, $S(\varrho) = 0$. Portanto, a equação acima fornece

$$\eta_{AB}(\varrho) \leq \frac{S(\Phi_A(\varrho)) + S(\Phi_B(\varrho))}{2}, \tag{3.8}$$

com igualdade ocorrendo para $\Phi_{A,B}(\varrho) = \Phi_A(\varrho) = \Phi_B(\varrho)$. A desigualdade acima pode ser saturada por observáveis A e B que definem a base de Schmidt de $|\psi\rangle$. Para verificar isso, considere os observáveis $\alpha = \sum_i \alpha_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$ e $\beta = \sum_i \beta_i |\beta_i\rangle\langle\beta_i|$ escritos em suas decomposições espectrais, sendo α_i e β_i seus autovalores, enquanto $|\alpha_i\rangle$ e $|\beta_i\rangle$ são os autoestados que definem a base de Schmidt, ou seja,

$$|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{\lambda_i} |\alpha_i\rangle |\beta_i\rangle, \tag{3.9}$$

com $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_i \lambda_i = 1$. Seguindo o formalismo adotado, definimos os operadores de projeção em termos dos autoestados de α e β , isto é, $P_i^\alpha = |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$ e $P_i^\beta = |\beta_i\rangle\langle\beta_i|$. Dessa forma, pode-se mostrar que

$$\begin{aligned}
\Phi_\alpha(\varrho) &= \sum_i (P_i^\alpha \otimes \mathbb{1}_\beta) \varrho (P_i^\alpha \otimes \mathbb{1}_\beta) \\
&= \sum_i \lambda_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| \otimes |\beta_i\rangle\langle\beta_i|,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

sendo $\varrho = \sum_{ij} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} |\alpha_i\rangle\langle\alpha_j| \otimes |\beta_i\rangle\langle\beta_j|$. Através de cálculos análogos pode-se mostrar que $\Phi_\alpha(\varrho) = \Phi_\beta(\varrho) = \Phi_{\alpha,\beta}(\varrho)$, o que mostra que para observáveis definidos em termos da base de Schmidt, pode-se alcançar o limite superior da desigualdade dada pela Eq.(3.8), além de atingir a maximização na Eq.(3.4). Portanto, tomando $A = \alpha$ e $B = \beta$, obtemos

$$N_{\text{br}}(\varrho) = \eta_{\alpha\beta}(\varrho) = \frac{S(\Phi_\alpha(\varrho)) + S(\Phi_\beta(\varrho))}{2}. \tag{3.11}$$

Além disso, usando o teorema da entropia conjunta [31] verifica-se que

$$S(\Phi_\alpha(\varrho)) = H(\lambda_i) + \sum_i \lambda_i S(|\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| \otimes |\beta_i\rangle\langle\beta_i|), \quad (3.12)$$

com $S(|\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| \otimes |\beta_i\rangle\langle\beta_i|) = 0$, pois a entropia de um projetor é nula. Logo,

$$S(\Phi_\alpha(\varrho)) = H(\lambda_i) = - \sum_i \lambda_i \ln \lambda_i, \quad (3.13)$$

sendo $H(\lambda_i)$ a entropia de Shannon. Note que $E(\varrho) = S(\text{Tr}_\mathcal{A}(\varrho)) = S(\text{Tr}_\mathcal{B}(\varrho)) = - \sum_i \lambda_i \ln \lambda_i$ é a entropia de emaranhamento de ϱ , onde λ_i são os autovalores dos operadores densidade reduzidos ϱ_α e ϱ_β , que de acordo com o teorema de Schmidt, possuem os mesmos autovalores e são dados por $\varrho_\alpha = \sum_i \lambda_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$ e $\varrho_\beta = \sum_i \lambda_i |\beta_i\rangle\langle\beta_i|$. Dessa forma, através da igualdade $\Phi_\alpha(\varrho) = \Phi_\beta(\varrho)$ e das Eqs. (3.8) e (3.10) conclui-se que

$$N_{\text{br}}(\varrho) = \frac{S(\Phi_\alpha(\varrho)) + S(\Phi_\beta(\varrho))}{2} = \frac{S(\varrho_\alpha) + S(\varrho_\beta)}{2} = E(\varrho). \quad (3.14)$$

Portanto, para estados puros bipartidos, a não-localidade baseada em realismo é igual ao emaranhamento. Em particular, para o estado maximamente emaranhado $|\Psi_d\rangle$, nosso quantificador atinge o valor máximo dado por $N_{\text{br}}(|\Psi_d\rangle) = \ln d$. Notavelmente, seja qual for a dimensão d do espaço de Hilbert, nenhuma anomalia deverá emergir para esta medida de não-localidade.

3.3 HIERARQUIA DE QUANTICIDADE

Vimos no capítulo anterior que $\eta_{AB}(\rho) = 0$ para estados totalmente descorrelacionados ($\rho = \rho_\mathcal{A} \otimes \rho_\mathcal{B}$) e que estados de realidade, Eq.(2.61), são necessariamente separáveis. Desse modo, o estado mais geral com elemento de realidade para A pode ser escrito como

$$\rho_{[A]} = \sum_k p_k \Phi_A(\rho_k^A) \otimes \rho_k^B, \quad (3.15)$$

que claramente satisfaz $\Phi_A(\rho_{[A]}) = \rho_{[A]}$. Isto revela que tais estados exigem, além de separabilidade, realidade completa para suas formas reduzidas ($\text{Tr}_\mathcal{B} \rho_{[A]}$). Por outro lado,

eles são menos restritivos do que estados do tipo quântico-clássico $(\sum_{b'} p_{b'} \sigma_{A|b} \otimes B'_{b'})$ e clássico-clássico $(\sum_{a'b'} p_{a'b'} A'_{a'} \otimes B'_{b'})$, para os quais a discórdia quântica unidirecional [86, 89] e a discórdia quântica simétrica [90] desaparecem, respectivamente.

Repare que se considerarmos, por exemplo, a discórdia quântica unidirecional e o estado $\Phi_{B'}(\sigma) = \sum_{b'} p_{b'} \sigma_{A|b} \otimes B'_{b'}$, encontramos que

$$\mathcal{D}(\Phi_{B'}(\sigma)) = \min_B [I(\Phi_{B'}(\sigma)) - I(\Phi_B \Phi_{B'}(\sigma))] = 0$$

para uma escolha conveniente de $B = B'$ e segundo a propriedade $\Phi_B \Phi_{B'} = \Phi_{B'}$. No que refere-se a NBR para o contexto $(A, B', \Phi_{B'}(\sigma))$, podemos definir, de acordo com a Eq. (2.68), a quantidade

$$N_{\min}(\rho) := \min_{A,B} \eta_{AB}(\rho), \quad (3.16)$$

a qual fornece a quota inferior de não-localidade de contexto para o estado ρ . Verificamos que para $\rho = \Phi_{B'}(\sigma)$, obtemos

$$\begin{aligned} \eta_{AB'}(\Phi_{B'}(\sigma)) &= S(\Phi_A \Phi_{B'}(\sigma)) + S(\Phi_{B'} \Phi_{B'}(\sigma)) - S(\Phi_A \Phi_{B'} \Phi_{B'}(\sigma)) - S(\Phi_{B'}(\sigma)) \\ &= S(\Phi_A \Phi_{B'}(\sigma)) + S(\Phi_{B'}(\sigma)) - S(\Phi_A \Phi_{B'}(\sigma)) - S(\Phi_{B'}(\sigma)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

que é o valor mínimo da não-localidade η_{AB} . Isso indica que estados com discórdia nula implicam que existirá contextos $(A, B', \Phi_{B'}(\sigma))$, para os quais teremos ausência de não-localidade de contexto. Nesse caso,

$$N_{\min}(\Phi_{B'}(\sigma)) = \min_{A,B} \eta_{AB}(\Phi_{B'}(\sigma)) = \eta_{AB'}(\Phi_{B'}(\sigma)) = 0. \quad (3.17)$$

Tal informação nos diz que se tivermos $\mathcal{D} = 0$, então é certo que $N_{\min} = 0$, isto é, ausência de NBR para um dado contexto. Ainda, nos diz também que se $N_{\min} > 0$, teremos também $\mathcal{D} > 0$, ou seja, estados com $N_{\min} > 0$ formam um subconjunto de estados discordantes.

Dado o conteúdo exposto acima, é possível situar a NBR dentro de uma classe de hierarquia de medidas de quanticidade [26, 82]. Isso é feito na tabela 3.1, onde algumas

medidas conhecidas de quanticidade são organizadas em termos de modelos que negam suas próprias existências. A construção de tal hierarquia é apoiada pelo raciocínio que segue na discussão abaixo.

Para verificar se um contexto exhibe não-localidade de Bell, tomamos a tarefa de descrever a distribuição de probabilidade conjunta experimental $p(a, b|A, B)$ em termos do modelo de localidade causal

$$p(a, b|A, B) = \sum_{\lambda} p_{\lambda} p(a|A, \lambda) p(b|B, \lambda), \quad (3.18)$$

sem nenhuma restrição para as distribuições de probabilidade locais $p(a|A, \lambda)$ e $p(b|B, \lambda)$, onde λ desempenha o papel de uma variável oculta genérica que determina essas distribuições. Encontrando tais distribuições locais, provamos a ausência de não-localidade de Bell.

Agora, para provar a ausência de direcionamento EPR, além de considerar o modelo de localidade causal, impomos uma restrição para a distribuição local $p(a|A, \lambda)$. Ela deve ser construída em consistência com a teoria quântica, isto é, $p(a|A, \lambda) = \text{Tr}(A_a \rho_{\lambda}^A)$. Dessa forma, a hipótese de localidade causal é reescrita como

$$p(a, b|A, B) = \sum_{\lambda} p_{\lambda} \text{Tr}(A_a \rho_{\lambda}^A) p(b|B, \lambda), \quad (3.19)$$

de modo que a variável λ fique restrita à classe de estados quânticos $\rho_{\lambda}^A \in \mathcal{H}_A$.

Em seguida, para provar a ausência de emaranhamento, adicionamos outra restrição, isto é, $p(b|B, \lambda)$ é também confinado ao formalismo quântico. Com isso, ficamos restritos ao modelo

$$p(a, b|A, B) = \sum_{\lambda} p_{\lambda} \text{Tr}(A_a \rho_{\lambda}^A) \text{Tr}(B_b \rho_{\lambda}^B) = \text{Tr}(A_a \otimes B_b \rho_s), \quad (3.20)$$

com $\rho_s = \sum_{\lambda} p_{\lambda} \rho_{\lambda}^A \otimes \rho_{\lambda}^B$. Logo, se a existência de tal modelo for provada, teremos ausência de emaranhamento.

Já no caso da não-localidade baseada em realismo, a investigação é feita restringindo ainda mais os estados reduzidos da parte \mathcal{A} . Eles ficam restritos aos estados de realidade

$p(a A, \lambda)$	$p(b B, \lambda)$	Ausência de quanticidade
\forall	\forall	Não-localidade de Bell
$\text{Tr} (A_a \rho_\lambda^A)$	\forall	Direcionamento EPR
$\text{Tr} (A_a \rho_\lambda^A)$	$\text{Tr} (B_b \rho_\lambda^B)$	Emaranhamento
$\text{Tr} (A_a \Phi_A(\rho_\lambda^A))$	$\text{Tr} (B_b \rho_\lambda^B)$	Não-localidade baseada em realismo
$\text{Tr} (A_a A'_\lambda)$	$\text{Tr} (B_b \rho_\lambda^B)$	Discórdia quântica unidirecional
$\text{Tr} (A_a A'_\lambda)$	$\text{Tr} (B_b B'_\lambda)$	Discórdia quântica simétrica

Tabela 3.1: Hierarquia de medidas de quanticidade. As primeiras duas colunas definem as estruturas presumidas para as distribuições de probabilidades locais que, juntamente com a hipótese de localidade causal $p(a, b|A, B) = \sum_\lambda p_\lambda p(a|A, \lambda) p(b|B, \lambda)$, implica na ausência da correspondente classe de quanticidade dada na terceira coluna. Nas primeiras duas linhas, o símbolo \forall indica que qualquer estado ou parâmetro λ de qualquer teoria de variáveis ocultas é admitida. Para os outros casos, somente estados quânticos $\rho_\lambda^{\mathcal{R}} \in \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ (com \mathcal{R} assumindo \mathcal{A} ou \mathcal{B}) são considerados. Aqui, A e A' , e seus correspondentes projetores A_a e A'_λ , referem-se a observáveis arbitrários atuando sobre $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$, com interpretações similares para B_b e B'_λ .

$\Phi_A(\rho_\lambda^A)$ para qualquer A atuando em $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$. Nesse caso, a distribuição de probabilidades é descrita como

$$\begin{aligned}
p(a, b|A, B) &= \sum_\lambda p_\lambda \text{Tr} [A_a \Phi_A(\rho_\lambda^A)] \text{Tr} (B_b \rho_\lambda^B) \\
&= \text{Tr} \left[(A_a \otimes B_b) \sum_\lambda p_\lambda \Phi_A(\rho_\lambda^A) \otimes \rho_\lambda^B \right] \\
&= \text{Tr} [(A_a \otimes B_b) \rho_{[A]}], \tag{3.21}
\end{aligned}$$

onde $\rho_{[A]}$ é dado pela Eq. (3.15). Assim, sendo essa descrição possível, então fica claro que haverá pelo menos um contexto para o qual a NBR não será encontrada.

Finalmente, restringindo os estados de realidade aos projetores A'_λ e B'_λ , encontramos descrições capazes de acusar ausência tanto da discórdia quântica unidirecional, quanto da discórdia quântica simétrica, isto é, $p(a, b|A, B) = \text{Tr} [(A_a \otimes B_b) \sum_\lambda p_\lambda A'_\lambda \otimes \rho_\lambda^B]$ e $p(a, b|A, B) = \text{Tr} [(A_a \otimes B_b) \sum_\lambda p_\lambda A'_\lambda \otimes B'_\lambda]$, respectivamente.

Note que, em relação à discussão apresentada acima, estamos considerando somente a quota inferior da não-localidade de contexto, Eq. (3.16). Nossos resultados, obtidos através do modelo de localidade (3.18), e apresentados na tabela 3.1, concordam com a prova analítica apresentada em [54], onde é mostrado que N_{\min} se reduz ao emaranhamento e é

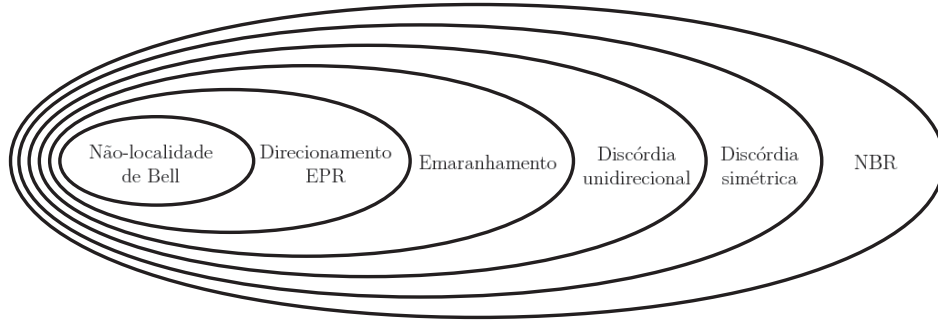


Figura 3.1: Diagrama de conjuntos representando a disposição hierárquica das medidas de quanticidade. Da esquerda para a direita, nota-se que os estados que são Bell não-locais formam um subconjunto de estados EPR direcionáveis, os quais formam um subconjunto de estados emaranhados, que formam um subconjunto de estados discordantes, que acabam formando um subconjunto de estados com NBR. Além disso, sendo um estado Bell não-local, então as outras medidas de quanticidade serão verificadas para tal estado. Por outro lado, um estado discordante pode não ter emaranhamento, direcionamento EPR e não-localidade de Bell, mas necessariamente terá NBR.

limitado superiormente pela discórdia quântica, Eq. (2.71). Porém, em relação ao quantificador de NBR, Eq. (3.4), vemos que o mesmo é definido em termos de um processo de maximização da não-localidade de contexto, isto é, N_{br} fornece uma informação diferente acerca da NBR associada ao estado do sistema descrito por ρ .

Nesse cenário, podemos mostrar que N_{br} pode ser não-nulo, mesmo para estados que apresentam discórdia nula. Para isso, vamos considerar o estado clássico-clássico $\varrho = \Phi_{A'}\Phi_{B'}(\sigma) = \sum_{a'b'} p_{a'b'} A'_{a'} \otimes B'_{b'}$, para o qual desaparece, escolhendo convenientemente $A = A'$ e $B = B'$, tanto a discórdia quântica unidirecional

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\Phi_{A'}\Phi_{B'}(\sigma)) &= \min_B [I(\Phi_{A'}\Phi_{B'}(\sigma)) - I(\Phi_B\Phi_{A'}\Phi_{B'}(\sigma))] \\ &= \min_B [I(\Phi_A\Phi_B(\sigma)) - I(\Phi_A\Phi_B(\sigma))] \\ &= 0, \end{aligned} \tag{3.22}$$

quanto a discórdia quântica simétrica

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_S(\Phi_{A'}\Phi_{B'}(\sigma)) &= \min_{A,B} [I(\Phi_{A'}\Phi_{B'}(\sigma)) - I(\Phi_A\Phi_B\Phi_{A'}\Phi_{B'}(\sigma))] \\ &= \min_{A,B} [I(\Phi_A\Phi_B(\sigma)) - I(\Phi_A\Phi_B(\sigma))] \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Já no caso da NBR, verificamos que existe pelo menos uma escolha de observáveis, para a qual a quantidade η_{AB} não desaparece quando consideramos o estado clássico-clássico $\varrho = \Phi_{A'}\Phi_{B'}(\sigma)$. Isso é verificado escolhendo os observáveis A e A' como sendo maximamente incompatíveis, de modo que $A_a A'_{a'} = \frac{1}{\sqrt{d_A}} |a\rangle\langle a'|$ e $\Phi_A \Phi_{A'}(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{d_A}} \otimes \sigma_B$, e de forma análoga para os observáveis B e B' . Nesse caso, encontramos que

$$\begin{aligned}
 \eta_{AB}(\varrho) &= S(\Phi_A \Phi_{A'} \Phi_{B'}(\sigma)) + S(\Phi_B \Phi_{A'} \Phi_{B'}(\sigma)) - S(\Phi_A \Phi_B \Phi_{A'} \Phi_{B'}(\sigma)) - S(\varrho) \\
 &= S\left(\frac{1}{d_A} \otimes \Phi_{B'}(\sigma_B)\right) + S\left(\Phi_{A'}(\sigma_A) \otimes \frac{1}{d_B}\right) - S\left(\frac{1}{d_A} \otimes \frac{1}{d_B}\right) - S(\varrho) \\
 &= S(\Phi_{B'}(\sigma_B)) + S(\Phi_{A'}(\sigma_A)) - S(\varrho) \\
 &= I(\varrho) > 0.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Dessa forma, temos que para o estado considerado a informação mútua é, em princípio, diferente de zero, pois não está descartada a possibilidade de haver correlações clássicas em ϱ .

Esse resultado, quando comparado àqueles fornecidos pela tabela 3.1, evidencia que, uma vez que podemos encontrar muitos modelos que satisfaçam as condições que levam à ausência de não-localidade de Bell, como descrito na tabela 3.1, então espera-se que o conjunto de estados Bell não-locais seja relativamente pequeno, isto é, não-localidade de Bell é a mais restritiva classe de quanticidade. Por outro lado, a Eq. (3.24) nos mostra que é possível existir NBR mesmo em cenários cujas discórdias quânticas são nulas ($\mathcal{D}_S = \mathcal{D} = 0$). Isso indica que estados com NBR formam um conjunto que engloba todas as outras medidas de quanticidade conhecidas.

Portanto, pode-se notar através da Fig. 3.1 que estados que apresentam não-localidade de Bell formam um subconjunto de estados EPR direcionáveis, os quais formam um subconjunto de estados emaranhados, que formam um subconjunto de estados com discórdia quântica unidirecional, que, por sua vez, formam um subconjunto de estados simetricamente discordantes e que, finalmente, formam um subconjunto de estados com NBR.

Pode-se notar, ainda, que sendo um estado Bell não-local, então as demais medidas de quanticidade serão também verificadas para tal estado, o que pode ser concluído analisando a Fig. 3.1. Por outro lado, se um estado apresenta emaranhamento, não neces-

sariamente ele deverá apresentar, também, direcionamento EPR e não-localidade de Bell, mas apresentará, necessariamente, ambas as discórdias e NBR.

3.4 COMPARANDO MEDIDAS DE NÃO-LOCALIDADE

Nessa parte do trabalho, computamos analiticamente a não-localidade baseada em realismo N_{br} para o estado de Werner, uma família de estados de dois qubits,

$$\rho_\mu = (1 - \mu) \frac{\mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B}{4} + \mu |s\rangle\langle s|, \quad (3.25)$$

onde $|s\rangle = (|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle) / \sqrt{2}$ é o estado singlete, $\{|\pm\rangle\}$ é uma base ortonormal composta pelos autoestados de σ_z e $\mu \in [0, 1]$ é o parâmetro de fidelidade ao estado puro. Considerando as Eq. (3.4) e (3.5), definimos os observáveis $A = \hat{a} \cdot \vec{\sigma} = \sum_i a_i \sigma_i$ e $B = \hat{b} \cdot \vec{\sigma} = \sum_i b_i \sigma_i$, sendo $\{\hat{a}, \hat{b}\}$ vetores unitários e $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ as matrizes de Pauli. Tais observáveis possuem autoestados

$$|\hat{a}(\hat{b}) \cdot \vec{\sigma}; +\rangle = \cos(\theta_{a(b)}/2) |+\rangle + e^{i\phi_{a(b)}} \sin(\theta_{a(b)}/2) |-\rangle \quad (3.26)$$

e

$$|\hat{a}(\hat{b}) \cdot \vec{\sigma}; -\rangle = -\sin(\theta_{a(b)}/2) |+\rangle + e^{i\phi_{a(b)}} \cos(\theta_{a(b)}/2) |-\rangle, \quad (3.27)$$

a partir dos quais é possível definir projetores de medição $A_\pm = |\hat{a} \cdot \vec{\sigma}; \pm\rangle\langle \hat{a} \cdot \vec{\sigma}; \pm|$ com igual parametrização para B e conseqüentemente construir os mapas

$$\Phi_A(\rho_\mu) = \sum_{i=\pm} (A_i \otimes \mathbb{1}_B) \rho_\mu (A_i \otimes \mathbb{1}_B); \quad (3.28)$$

$$\Phi_B(\rho_\mu) = \sum_{i=\pm} (\mathbb{1}_A \otimes B_i) \rho_\mu (\mathbb{1}_A \otimes B_i); \quad (3.29)$$

$$\Phi_{AB}(\rho_\mu) = \sum_{i=\pm} (A_i \otimes \mathbb{1}_B) \Phi_B(\rho_\mu) (A_i \otimes \mathbb{1}_B). \quad (3.30)$$

Em seguida, mediante um cálculo de autovalores, obtemos $\left\{ \frac{1-\mu}{4}, \frac{1-\mu}{4}, \frac{1-\mu}{4}, \frac{1+3\mu}{4} \right\}$ para ρ_μ , $\left\{ \frac{1\pm\mu}{4} \right\}$ para os estados de realidade $\Phi_A(\rho_\mu)$ e $\Phi_B(\rho_\mu)$, cada um duplamente degenerado, e $\left\{ \frac{1\pm\mu r}{4} \right\}$ para $\Phi_{AB}(\rho_\mu)$ com dupla degenerescência para cada autovalor. No último caso,

$r = \sqrt{(\cos \theta_a \cos \theta_b + \cos(\phi_a - \phi_b) \sin \theta_a \sin \theta_b)^2}$ é uma função em termos dos ângulos que definem os observáveis A e B , onde a expressão no argumento da raiz corresponde ao produto interno dos vetores unitários \hat{a} e \hat{b} , isto é, $r = \sqrt{(\hat{a} \cdot \hat{b})^2}$, evidenciando que o parâmetro $r \in [0, 1]$.

Agora, de posse dos autovalores descritos acima foi possível computar para ρ_μ , a não-localidade de contexto via entropia de von Neumann, isto é,

$$\begin{aligned} \eta_{AB}(\rho_\mu) &= 2(1 - \mu r) \ln(1 - \mu r) + 2(1 + \mu r) \ln(1 + \mu r) + (1 + 3\mu) \ln(1 + 3\mu) \\ &- (1 - \mu) \ln(1 - \mu) - 4(1 + \mu) \ln(1 + \mu), \end{aligned}$$

cuja expressão analítica resultante é uma função das variáveis μ e r , sendo r o parâmetro que determina a maximização exigida pela NBR, Eq. (3.4).

Para proceder com este cálculo, analisamos a derivada de $\eta_{AB}(\rho_\mu)$ em relação a r ,

$$\frac{\partial}{\partial r} \eta_{AB}(\rho_\mu) = \mu \operatorname{arctanh}(\mu r),$$

a qual fornece um ponto de mínimo em $r = 0$ e é não-negativa para todo μ e r , o que revela um comportamento monótono de $\eta_{AB}(\rho_\mu)$ em relação ao parâmetro r , mostrando que a função atinge seu valor máximo para $r = 1$, o que indica a direção na qual teremos a maximização de $\eta_{AB}(\rho_\mu)$. Dessa forma, via Eq. (3.4), a NBR para o estado de Werner é

$$N_{\text{br}}(\rho_\mu) = (1 + 3\mu) \ln(1 + 3\mu) + (1 - \mu) \ln(1 - \mu) - 2(1 + \mu) \ln(1 + \mu). \quad (3.31)$$

Para efeito de comparação, calculamos outros dois quantificadores de não-localidade, porém ambos são baseados em violações de desigualdades de Bell, especificamente a desigualdade CHSH. Primeiramente, começamos com o recentemente introduzido volume de violação [53]. Para isso, considere a desigualdade CHSH, definida como

$$\mathbb{B} := |A_1 B_1 + A_1 B_2 + A_2 B_1 - A_2 B_2| \leq 2, \quad (3.32)$$

onde $A_i B_j \equiv \langle \hat{u}_i \cdot \vec{\sigma} \otimes \hat{v}_j \cdot \vec{\sigma} \rangle = \operatorname{Tr}[(\hat{u}_i \cdot \vec{\sigma} \otimes \hat{v}_j \cdot \vec{\sigma}) \rho]$ com vetores unitários reais $\hat{u}_{1,2}$ e $\hat{v}_{1,2}$. Em seguida, considerando o estado de Werner ρ_μ , verificamos que todos os termos $A_i B_j$

podem ser escritos como $A_i B_j = -\mu(\cos \theta_i \cos \theta_j + \cos(\phi_i - \phi_j) \sin \theta_i \sin \theta_j) = -\mu(\hat{u}_i \cdot \hat{v}_j)$.

Logo, a desigualdade CHSH é reescrita como

$$\begin{aligned} \mathbb{B} : &= |-\mu(\hat{u}_1 \cdot \hat{v}_1 + \hat{u}_1 \cdot \hat{v}_2 + \hat{u}_2 \cdot \hat{v}_1 - \hat{u}_2 \cdot \hat{v}_2)| \leq 2 \\ &= \mu |\hat{u}_1 \cdot (\hat{v}_1 + \hat{v}_2) + \hat{u}_2 \cdot (\hat{v}_1 - \hat{v}_2)| \leq 2, \end{aligned} \quad (3.33)$$

o que nos mostra que a condição para que haja violação da desigualdade CHSH é dada por

$$|\hat{u}_1 \cdot (\hat{v}_1 + \hat{v}_2) + \hat{u}_2 \cdot (\hat{v}_1 - \hat{v}_2)| > 2/\mu. \quad (3.34)$$

Nesse caso, é interessante destacar que se os vetores unitários forem parametrizados em coordenadas esféricas, a computação do volume de violação demanda uma contagem do número de pontos $\{\theta_{u_1}, \phi_{u_1}, \theta_{u_2}, \phi_{u_2}, \theta_{v_1}, \phi_{v_1}, \theta_{v_2}, \phi_{v_2}\}$ que satisfazem a condição de violação, Eq. (3.34). Isso constitui um problema muito complicado, com solução analítica conhecida somente para um cenário muito específico [102], correspondendo aqui a $\mu = 1$. Para contornar essa dificuldade, adotamos um caminho diferente. Primeiro, note que os termos $\hat{u}_i \cdot (\hat{v}_1 \pm \hat{v}_2)$ da Eq. (3.34) podem ser escritos segundo a definição de produto interno, isto é,

$$\hat{u}_i \cdot (\hat{v}_1 \pm \hat{v}_2) = \|\hat{u}_i\| \|\hat{v}_1 \pm \hat{v}_2\| \cos \alpha_i = \sqrt{2(1 \pm \hat{v}_1 \cdot \hat{v}_2)} \cos \alpha_i \quad (3.35)$$

onde $\|\hat{u}_i\| = 1$ para $i = 1, 2$ e $\|\hat{v}_1 \pm \hat{v}_2\| = \sqrt{(\hat{v}_1 \pm \hat{v}_2)^2}$. Substituindo isso na condição de violação, podemos reescrevê-la na forma

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \left| \cos \alpha_1 \sqrt{1 + \hat{v}_1 \cdot \hat{v}_2} + \cos \alpha_2 \sqrt{1 - \hat{v}_1 \cdot \hat{v}_2} \right| &> 2/\mu \\ \left| \cos \alpha_1 \sqrt{\frac{1 + \hat{v}_1 \cdot \hat{v}_2}{2}} + \cos \alpha_2 \sqrt{\frac{1 - \hat{v}_1 \cdot \hat{v}_2}{2}} \right| &> 1/\mu. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Segundo, observe que a partir dos dois primeiros membros da Eq. (3.35) e da condição de violação acima é possível introduzir as variáveis reais

$$x = \frac{\hat{u}_1 \cdot (\hat{v}_1 + \hat{v}_2)}{\|\hat{v}_1 + \hat{v}_2\|}, \quad y = \frac{\hat{u}_2 \cdot (\hat{v}_1 - \hat{v}_2)}{\|\hat{v}_1 - \hat{v}_2\|}, \quad z = \frac{1 + \hat{v}_1 \cdot \hat{v}_2}{2}, \quad (3.37)$$

com $x = \cos \alpha_1$ e $y = \cos \alpha_2$, tal que $\{x, y\} \in [-1, 1]$ e $z \in [0, 1]$. A adoção dessa estratégia reduz grandemente o espaço de integração, além de nos permitir escrever a condição de violação numa forma mais simples, qual seja

$$\mu \mathfrak{B}(x, y, z) > 1, \quad \mathfrak{B}(x, y, z) := \left| x\sqrt{z} + y\sqrt{1-z} \right|, \quad (3.38)$$

onde $1-z = (1-\hat{v}_1 \cdot \hat{v}_2)/2$. Agora, integrando nas variáveis (x, y, z) , o volume de violação para o estado de Werner é

$$N_{\text{vol}}(\rho_\mu) = \frac{1}{K} \int \int \int_{\Gamma} dx \, dy \, dz, \quad (3.39)$$

sendo Γ o subespaço dos pontos $\{x, y, z\}$ que satisfazem a condição (3.38) e $K = 4$ o volume total (constante de normalização). Antes de realizarmos a integração acima, provaremos que $N_{\text{vol}}(\rho_\mu) = 0$ para $\mu \leq 1/\sqrt{2}$. Isso pode ser demonstrado com a parametrização $\mu = (1+\epsilon)/\sqrt{2}$, a qual permite escrever a condição de violação como

$$\mu \mathfrak{B}(x, y, z) > 1 \longrightarrow \mathfrak{B}(x, y, z) > \frac{\sqrt{2}}{1+\epsilon}. \quad (3.40)$$

Partindo de $(X-Y)^2 \geq 0$, obtemos $2XY \leq X^2 + Y^2$. Note que o valor máximo do produto equivale à soma de quadrados. Usando isso em conjunto com a desigualdade triangular, encontramos $|X+Y| \leq \sqrt{2(X^2+Y^2)}$ com igualdade para $X=Y$. Agora, fazendo $X = x\sqrt{z}$ e $Y = y\sqrt{1-z}$, temos

$$\mathfrak{B} = \left| x\sqrt{z} + y\sqrt{1-z} \right| \leq \sqrt{2} \sqrt{x^2 z + y^2 (1-z)} \leq \sqrt{2}, \quad (3.41)$$

sendo a última desigualdade saturada para $x^2 = y^2 = 1$. Dessa forma, verifica-se que $\mathfrak{B} = |X+Y| \leq \sqrt{2}$. Agora, considerando a parametrização mostrada acima temos

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\sqrt{2}}{1+\epsilon} < \mathfrak{B} \leq \sqrt{2} \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{1+\epsilon} < \sqrt{2} \quad (3.42)$$

que é satisfeita somente se $\epsilon > 0$, isto é, para $\mu > 1/\sqrt{2}$. Portanto, não haverá volume de violação se $\mu \leq 1/\sqrt{2}$. Voltando à condição de violação, Eq. (3.38), pode-se verificar por

derivação direta que a função $\mathfrak{B}(x, y, z)$ possui um valor máximo em $z = x^2/(x^2 + y^2)$, o que nos fornece $\mathfrak{B}(x, y, z_{\text{máx}}) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Lembrando que $\mathfrak{B}(x, y, z) \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2 z + y^2(1 - z)}$, obtemos a seguinte desigualdade

$$\mathfrak{B}(x, y, z) \leq \mathfrak{B}(x, y, z_{\text{máx}}) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (3.43)$$

com igualdade válida para $z = 1/2$. Isso implica, via Eq.(3.38), que

$$\frac{1}{\mu} < \mathfrak{B}(x, y, z) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \longrightarrow x^2 + y^2 > \frac{1}{\mu^2}. \quad (3.44)$$

Agora vamos introduzir uma parametrização em coordenadas polares para as variáveis (x, y) e uma transformação conveniente para a variável z . Adotaremos

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = \sin^2 \Theta, \quad (3.45)$$

com $\varphi \in [0, 2\pi]$ e $\Theta \in [0, \pi/2]$. Desse modo, usando a condição de violação (3.38) e a Eq. (3.44) encontramos as desigualdades

$$\mu \mathfrak{B} > 1 \longrightarrow \mu |x\sqrt{z} + y\sqrt{1 - z}| > 1 \longrightarrow r |\sin(\phi + \Theta)| > \frac{1}{\mu} \quad (3.46)$$

que é a própria condição de violação reescrita em termos da variáveis angulares e

$$x^2 + y^2 > \frac{1}{\mu^2} \longrightarrow r > \frac{1}{\mu} \quad (3.47)$$

que relaciona a variável r com o parâmetro μ . De posse dessas duas desigualdades, podemos ajustar os limites de integração na Eq. (3.39). Primeiramente, note que $dx dy dz = |J| dr d\varphi d\Theta$, onde $|J| = r \sin 2\Theta$ é o Jacobiano. Para a integração em Θ , os limites são obtidos notando-se que a partir da primeira desigualdade, $\arcsin(1/\mu r) < \Theta + \varphi < \pi - \arcsin(1/\mu r)$, de modo que $\Theta \in (\Theta_{\text{mín}}, \Theta_{\text{máx}})$ com $\Theta_{\text{mín}} = -\varphi + \arcsin\left(\frac{1}{\mu r}\right)$ e $\Theta_{\text{máx}} = \pi - \varphi - \arcsin\left(\frac{1}{\mu r}\right)$. Já no caso da integração em φ e r , podemos usar a segunda desigualdade para inferirmos o domínio de integração no plano xy e a simetria da Fig. 3.2 para focarmos na área hachurada abaixo da linha $\varphi = \pi/4$. Nessa região, vemos que os limites

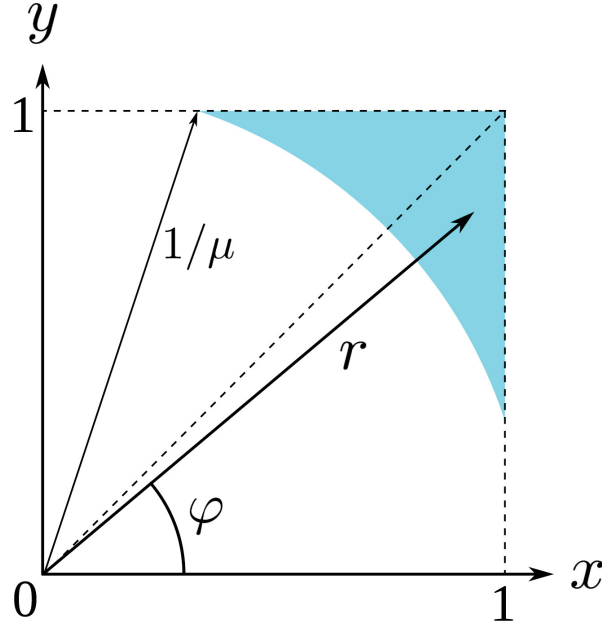


Figura 3.2: Um quarto do domínio xy (área em ciano) onde a condição de violação (3.44) é satisfeita. Note que nessa região, estão localizados todos os pontos r como indicado pela seta. Além disso, ela é limitada pelo arco $1/\mu$ e é simétrica em relação à diagonal (linha tracejada) do quadrado. Uma inspeção detalhada dessa geometria permite a computação analítica do volume de violação (3.39).

de integração para φ são dados por $\varphi_{\min} = \arccos \mu$ e $\varphi_{\max} = \pi/4$, enquanto os limites para r são dados por $r_{\min} = 1/\mu$ e $r_{\max} = 1/\cos \varphi$.

Dessa forma, com todos os limites de integração definidos, o volume de violação para o estado de Werner é dado pela integral

$$N_{\text{vol}}(\rho_\mu) = 2 \left[\int_{\arccos \mu}^{\pi/4} d\varphi \int_{1/\mu}^{1/\cos \varphi} r dr \right] \int_{-\varphi + \arcsin(1/\mu r)}^{\pi - \varphi - \arcsin(1/\mu r)} \sin 2\Theta d\Theta, \quad (3.48)$$

a qual resulta em

$$N_{\text{vol}}(\rho_\mu) = \frac{8}{3} \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) g_\mu + \frac{2}{\mu} \ln \left[4\mu^2 (1 - g_\mu) - 1 \right], \quad (3.49)$$

onde $g_\mu := \sqrt{1 - 1/(2\mu^2)}$. Verificamos a validade desse resultado, contando numericamente, em uma amostra aleatória de 10^8 pontos $\{\theta_{u_1}, \phi_{u_1}, \theta_{u_2}, \phi_{u_2}, \theta_{v_1}, \phi_{v_1}, \theta_{v_2}, \phi_{v_2}\}$ que satisfazem a condição (3.34). Não foram observados desvios significativos dentro da margem de erro do método estatístico adotado, o que pode ser visto na Fig. 3.3.

Finalmente, vamos computar $N_{\max}(\rho_\mu)$, que consiste da quantidade pela qual a desi-

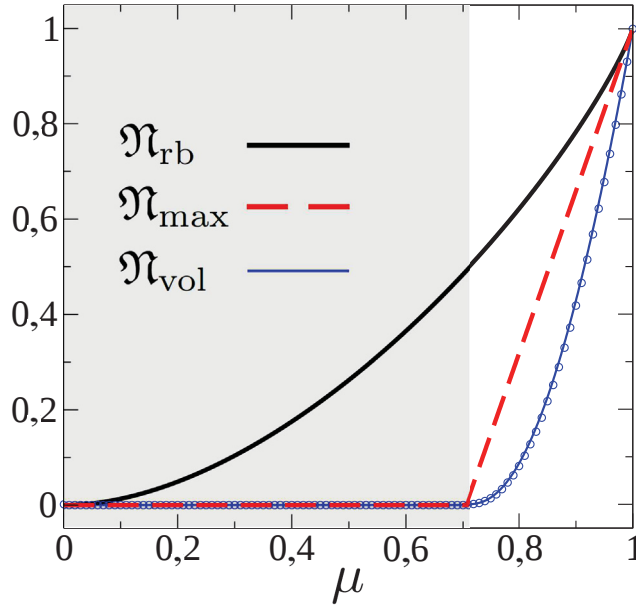


Figura 3.3: Quantificadores de não-localidade normalizados \mathfrak{N}_{br} (linha preta espessa), $\mathfrak{N}_{\text{max}}$ (linha vermelha tracejada) e $\mathfrak{N}_{\text{vol}}$ (linha azul fina) para o estado de Werner como função do parâmetro μ . Os pequenos círculos azul referem-se ao resultado numérico obtido para $\mathfrak{N}_{\text{vol}}$ pela contagem dos pontos $\{\theta_{u_1}, \phi_{u_1}, \theta_{u_2}, \phi_{u_2}, \theta_{v_1}, \phi_{v_1}, \theta_{v_2}, \phi_{v_2}\}$ que satisfazem a condição de violação (3.34). Na região cinza ($\mu \leq 1/\sqrt{2}$) a desigualdade CHSH prevê ausência de não-localidade de Bell. Para $\mu > 1/\sqrt{2}$, os quantificadores de não-localidade são funções monotonicamente crescentes de μ e, nesse sentido, são equivalentes.

gualdade CHSH é maximamente violada para o estado de Werner ρ_μ . Matematicamente, temos

$$N_{\text{max}}(\rho_\mu) = \max \left[0, \max_{x,y,z} \mu \mathfrak{B}(x,y,z) - 1 \right], \quad (3.50)$$

onde vimos que $z = x^2/(x^2 + y^2)$ satura $\mathfrak{B}(x,y,z)$ levando-a ao valor $\sqrt{x^2 + y^2}$, que é máximo para $x = y = 1$. Então,

$$N_{\text{max}}(\rho_\mu) = \max \left[0, \mu\sqrt{2} - 1 \right], \quad (3.51)$$

o que implica em ausência da não-localidade de Bell para $\mu \leq 1/\sqrt{2}$, em total concordância com o volume de violação $N_{\text{vol}}(\rho_\mu)$ e os resultados reportados nas referências [18] e [81].

Os resultados (3.31), (3.49) e (3.51) são funções monotonicamente crescentes de μ no domínio $(1/\sqrt{2}, 1]$. Todos atingem seus valores máximos para o estado singlete, $\mu = 1$ e concordam que o estado de dois qubits maximamente emaranhado é também maximamente não-local. A Fig. 3.3 fornece uma comparação entre os quantificadores em termos

de suas respectivas formas normalizadas, as quais são definidas como

$$\mathfrak{N}_\Delta(\rho_\mu) = \frac{\mathfrak{N}_\Delta(\rho_\mu)}{\mathfrak{N}_\Delta(\rho_{\mu=1})} \quad (\Delta = \text{rb, vol, max}). \quad (3.52)$$

O mais notável sobre esses resultados é que a NBR se estende por todo o domínio de $\mu \in [0, 1]$, sendo presente mesmo quando ocorre ausência de não-localidade de Bell. Isso indica que nossa abordagem é mais sensível à presença de aspectos não-locais do que aquelas construídas para atestar a presença de não-localidade de Bell.

3.5 MONOTONICIDADE

Conforme é descrito nas referências [75, 103], no que diz respeito ao emaranhamento, uma boa medida desse recurso deve satisfazer alguns requisitos como, por exemplo, ser nula para estados separáveis, ser invariante por operações unitárias locais, dentre outras apresentadas no capítulo anterior. Na referência [104], além de algumas das exigências acima, Vidal aponta a monotonicidade sob operações locais como sendo a única exigência natural para a quantificação de emaranhamento, de modo que este recurso não deve aumentar sob operações realizadas localmente. Há outras propostas na literatura [105–107] sobre os requisitos que uma medida razoável de emaranhamento deve cumprir, mas não há uma concordância sobre tais exigências.

No caso da quantificação de não-localidade, apesar de também não haver consenso sobre quais condições, de fato, uma medida dessa quantidade deve satisfazer, existe na literatura alguns trabalhos [100, 108–110] que, em analogia com a teoria de emaranhamento, estabeleceram alguns critérios que devem ser satisfeitos por quantificadores de não-localidade. Dentre eles, destacamos a invariância unitária, a nulidade para estados separáveis e principalmente a monotonicidade, isto é, o fato de que a não-localidade não pode aumentar sob operações locais.

Dessa forma, mesmo não havendo um conjunto específico de condições que devem ser obedecidas por quantificadores de recursos não-locais, parece haver na literatura consenso sobre a condição de monotonicidade. Em relação ao contexto de quantificação da NBR, apresentamos evidências de que nossa medida de não-localidade não aumenta através

de operações locais realizadas em alguma parte do sistema, isto é, a NBR mostrou ser monótona sob transformações locais quando implementamos a ação de ruído quântico em um dos sítios do sistema.

Começamos a análise apresentando uma prova que garante a invariância unitária da NBR. Para ver isso, considere um estado $\tilde{\rho} = U\rho U^\dagger$ atuando sobre o espaço bipartido $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, onde $U = (U_A \otimes U_B)$ é a transformação unitária local que atua sobre o estado inicial ρ e satisfaz a condição $U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{1}$. Considerando também a definição da NBR, Eq. (3.4), para o referido estado $\tilde{\rho}$, temos que

$$N_{\text{br}}(\tilde{\rho}) := \max_{A,B} \eta_{AB}(\tilde{\rho}), \quad (3.53)$$

com $\eta_{AB}(\tilde{\rho}) = S(\Phi_A(\tilde{\rho})) + S(\Phi_B(\tilde{\rho})) - S(\Phi_{AB}(\tilde{\rho})) - S(\tilde{\rho})$, sendo $A = \sum_a a A_a$ e $B = \sum_b b B_b$ com projetores $A_a = |a\rangle\langle a|$ e $B_b = |b\rangle\langle b|$ observáveis atuando em \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , respectivamente. Observa-se que via mapa de medição projetiva temos que

$$\Phi_A(\tilde{\rho}) = \sum_a (A_a \otimes \mathbb{1}_B) \tilde{\rho} (A_a \otimes \mathbb{1}_B), \quad (3.54)$$

de forma equivalente para $\Phi_B(\tilde{\rho})$ e $\Phi_{AB}(\tilde{\rho})$. Agora, vejamos o que acontece quando a transformação U atua sobre esse estado de realidade. Note que

$$\begin{aligned} U^\dagger \Phi_A(\tilde{\rho}) U &= U^\dagger \left[\sum_a (A_a \otimes \mathbb{1}_B) U \rho U^\dagger (A_a \otimes \mathbb{1}_B) \right] U \\ &= \sum_a (\tilde{A}_a \otimes \mathbb{1}_B) \rho (\tilde{A}_a \otimes \mathbb{1}_B) \\ &= \Phi_{\tilde{A}}(\rho), \end{aligned} \quad (3.55)$$

onde $\tilde{A}_a = U_A^\dagger A_a U_A$. Note que sendo U_A uma transformação que satisfaz a condição $U_A^\dagger U_A = U_A U_A^\dagger = \mathbb{1}$, então

$$U^\dagger \Phi_A(\tilde{\rho}) U = \Phi_{\tilde{A}}(\rho) \rightarrow \Phi_A(\tilde{\rho}) = U \Phi_{\tilde{A}}(\rho) U^\dagger.$$

De modo análogo, pode-se verificar que $U^\dagger \Phi_B(\tilde{\rho}) U = \Phi_{\tilde{B}}(\rho) \rightarrow \Phi_B(\tilde{\rho}) = U \Phi_{\tilde{B}}(\rho) U^\dagger$ e $U^\dagger \Phi_{AB}(\tilde{\rho}) U = \Phi_{\tilde{A}\tilde{B}}(\rho) \rightarrow \Phi_{AB}(\tilde{\rho}) = U \Phi_{\tilde{A}\tilde{B}}(\rho) U^\dagger$. Usando a propriedade de invariância

unitária da entropia de von Neumann, verificamos que

$$\begin{aligned} S(\tilde{\rho}) &= S(U\rho U^\dagger) = S(\rho); & S(\Phi_A(\tilde{\rho})) &= S(U\Phi_{\tilde{A}}(\rho)U^\dagger) = S(\Phi_{\tilde{A}}(\rho)); \\ S(\Phi_B(\tilde{\rho})) &= S(U\Phi_{\tilde{B}}(\rho)U^\dagger) = S(\Phi_{\tilde{B}}(\rho)); & S(\Phi_{AB}(\tilde{\rho})) &= S(U\Phi_{\tilde{A}\tilde{B}}(\rho)U^\dagger) = S(\Phi_{\tilde{A}\tilde{B}}(\rho)). \end{aligned}$$

Agora, de acordo com a Eq. (3.53), teremos

$$\begin{aligned} N_{\text{br}}(\tilde{\rho}) &= \max_{A,B} [S(\Phi_A(\tilde{\rho})) + S(\Phi_B(\tilde{\rho})) - S(\Phi_{AB}(\tilde{\rho})) - S(\tilde{\rho})] \\ &= \max_{A,B} [S(\Phi_{\tilde{A}}(\rho)) + S(\Phi_{\tilde{B}}(\rho)) - S(\Phi_{\tilde{A}\tilde{B}}(\rho)) - S(\rho)] \\ &= N_{\text{br}}(\rho), \end{aligned} \tag{3.56}$$

onde a maximização sobre todos os pares de observáveis \tilde{A} e \tilde{B} é equivalente ao mesmo processo sobre os pares A e B , pois $A = \sum_a a A_a \rightarrow U_{\mathcal{A}}^\dagger A U_{\mathcal{A}} = \sum_a a \tilde{A}_a = \tilde{A}$, de modo que A e sua transformada unitária $U_{\mathcal{A}}^\dagger A U_{\mathcal{A}} = \tilde{A}$ são observáveis equivalentes unitários [111], o mesmo valendo para B e \tilde{B} . Portanto, vemos que a condição de invariância sob transformações unitárias é satisfeita pela NBR. Apontamos também para o caso em que o estado quântico ρ sofre uma medição na partição \mathcal{A} , o que faz, segundo a MQ, o estado do sistema colapsar para o estado separável $A_a \otimes \rho_{\mathcal{B}|a}$ com probabilidade p_a , sendo A_a um projetor definido em termos dos autoestados do observável medido A . Nesse caso, dado a propriedade de aditividade da entropia de von Neumann é visto que

$$\begin{aligned} \eta_{AB}(A_a \otimes \rho_{\mathcal{B}|a}) &= S(\Phi_A(A_a \otimes \rho_{\mathcal{B}|a})) + S(\Phi_B(A_a \otimes \rho_{\mathcal{B}|a})) - S(\Phi_{AB}(A_a \otimes \rho_{\mathcal{B}|a})) - S(A_a \otimes \rho_{\mathcal{B}|a}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

e conseqüentemente, $N_{\text{br}}(A_a \otimes \rho_{\mathcal{B}}) = 0$. Além disso, a não-localidade decrescerá na média, isto é,

$$N_{\text{br}}(\rho) - \sum_a p_a N_{\text{br}}(A_a \otimes \rho_{\mathcal{B}|a}) \geq 0, \tag{3.57}$$

sendo que o primeiro termo é a própria NBR do estado ρ sob análise. O segundo termo é uma média da NBR calculada para cada rodada após a medição de um observável arbitrário A . Como mostrado acima, a NBR se anula após a medição em cada realização

e, portanto, se anulará em média. Portanto, na média, a NBR não aumenta sob medições locais. Ainda, como mostramos anteriormente, vemos que $N_{\text{br}}(\rho) \geq 0$.

Em seguida, exibimos resultados numéricos que fornecem evidências de que nosso quantificador apresenta monotonicidade sob perturbações locais. Tais resultados foram obtidos para um estudo de caso, onde utilizamos o estado de Werner sob a ação de canais de ruído atuando localmente em uma das partições do estado. Como discutido na subseção 2.4.2, consideramos os canais de inversão de bit (IB), inversão de fase (IF), inversão de bit e fase (IBF), de despolarização (DP) e de atenuação de amplitude generalizado (AAG). Utilizando o formalismo adotado, podemos representar a ação dos canais de ruído sobre o estado de Werner pelo mapa

$$\chi(\rho_\mu) = \sum_i (\mathbb{1}^{\mathcal{A}} \otimes E_i^{\mathcal{B}}) \rho_\mu (\mathbb{1}^{\mathcal{A}} \otimes E_i^{\mathcal{B}}), \quad (3.58)$$

onde a atuação do ruído ocorre no sítio \mathcal{B} . Os elementos $E_i^{\mathcal{A}(\mathcal{B})}$ são os termos que modelam o tipo de ruído que atua sobre o estado ρ_μ .

Entenda-se que nesse caso os mapas de medição projetiva $\Phi_{A(B)}$ atuarão sobre $\chi(\rho_\mu)$, isto é, o estado ρ_μ sob efeito ruidoso. Os resultados apresentados a seguir exibem comparações entre a NBR calculada para este caso em relação ao caso sem ruído, dado pela Eq. (3.31). Isso foi feito através de uma análise estatística sorteando vários estados aleatoriamente através de um gerador de números aleatórios desenvolvido no software *Mathematica* 7, de modo que cada ponto da distribuição obtida foi calculado para valores aleatórios de $(\mu, p, \gamma) \in [0, 1]$.

Na Fig. 3.4, a primeira linha corresponde ao efeito produzido pela atuação dos canais de inversão, IB, IF e IBF. Nesse caso, ambos os canais produziram o mesmo efeito devido à invariância rotacional do estado singleto, de modo que na figura abaixo está representado a ação de apenas um deles, o canal de IB. Na Fig. 3.4 (a), vemos que na ausência de ruído, $p = 0$, o máximo do resultado numérico coincide com o resultado analítico (curva preta) computado via definição da NBR, Eq. (3.4). Quando adicionamos o efeito produzido pelos canais inversão, observamos que há degradação da NBR em consequência da ação do ruído introduzido no sistema. Na Fig. 3.4 (b), observamos esse efeito para $p = 0.5$. Já para $p = 1$,

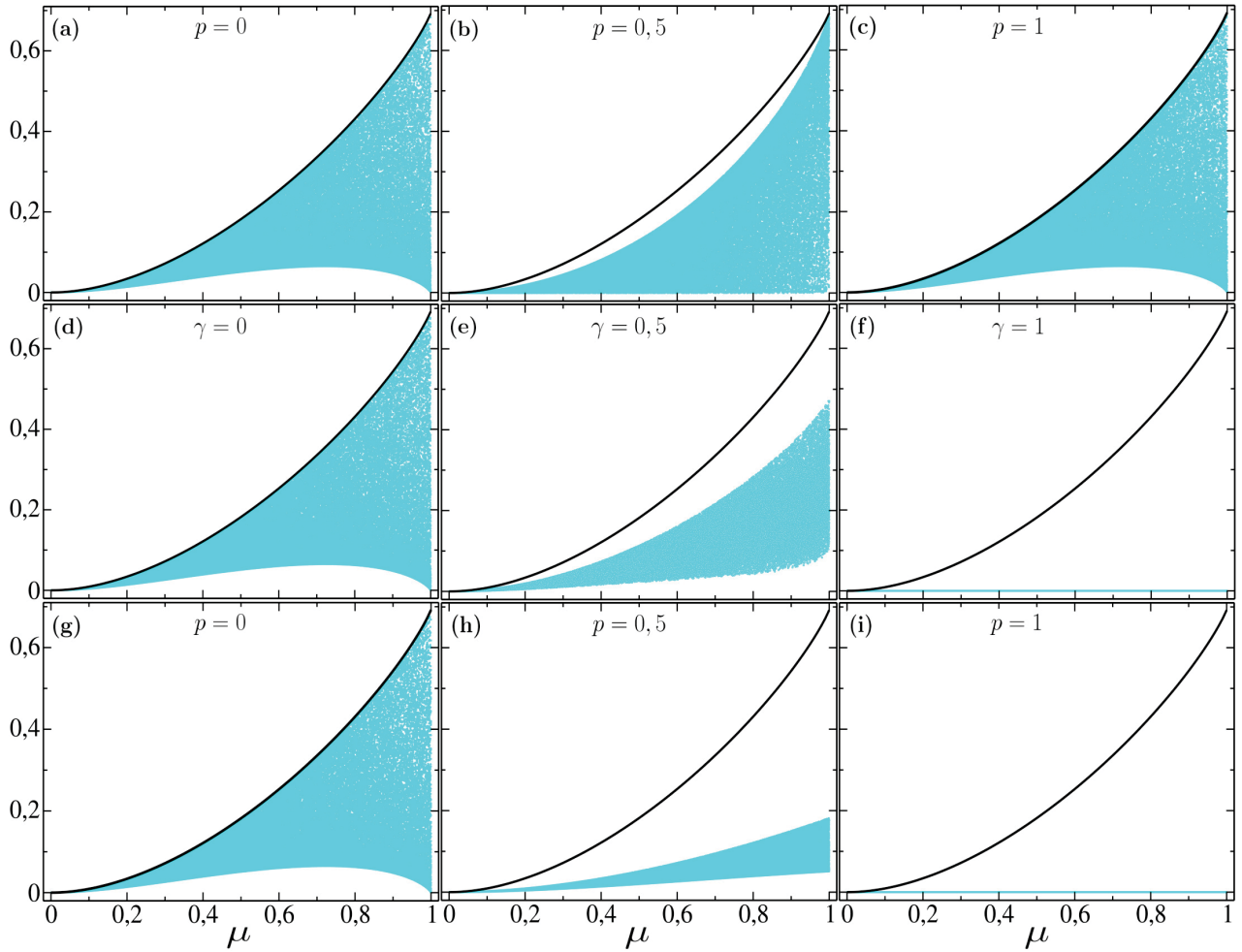


Figura 3.4: Ilustração da ação de canais de ruído sobre a NBR calculada para o estado ρ_μ . Na primeira linha (a, b, c) temos a representação do efeito do canal de IB. Exibiremos apenas a ilustração para esse canal de inversão, uma vez que para os outros dois (IF e IBF) o resultado é similar, o que é explicado pela invariância rotacional do singleto. Na segunda linha apresentamos o efeito do canal AAG. Já na terceira linha, o efeito do canal DP. Em todos os quadros, a curva preta representa a NBR computada analiticamente através de sua definição, Eq. (3.4), sem a atuação de canais de ruído. Para todos os quadros acima, o cálculo numérico foi realizado para 10^5 pontos, os quais formam a região em ciano, sendo p e γ as probabilidades de ocorrência do ruído. Isso foi feito por meio de uma análise estatística sorteando aleatoriamente vários estados através de um gerador de números aleatórios desenvolvido no software *Mathematica* 7, de modo que cada ponto da distribuição obtida foi calculado para valores aleatórios de $(\mu, p, \gamma) \in [0, 1]$.

notamos que não há degradação da NBR, pois o termo $\sqrt{1-p}$ que multiplica as matrizes σ_x, σ_y e σ_z torna-se nulo nos três casos, o que elimina o efeito dos canais de inversão. Isso pode ser visto na Fig. 3.4 (c).

Considerando agora o efeito do canal de atenuação de amplitude generalizado (AAG) visto na segunda linha da Fig. 3.4, vemos que para $p = 0$ vale a mesma discussão acima.

Porém, notamos que para $p = 0.5$, a atuação do ruído causa uma degradação da NBR mais considerável que o efeito causado pelos canais de inversão e, diferentemente desses, a degradação é total para $p = 1$, como pode ser visualizado nas Figs. 3.4 (e, f). Já na terceira linha da Fig. 3.4 observamos o caso do canal de DP. Note que em relação aos casos anteriores, a NBR sofre uma degradação bem mais acentuada para $p = 0.5$, Fig. 3.4 (h), sendo totalmente degradada também para $p = 1$, Fig. 3.4 (i), indicando que a NBR é menos resistente à ação desse canal de ruído.

É importante observar que em todos os casos descritos acima, a medida de NBR satisfaz a condição de monotonicidade, pois

$$N_{\text{br}}(\rho_\mu) \geq N_{\text{br}}(\chi(\rho_\mu)), \quad (3.59)$$

evidenciando que a medida proporcionada pelo quantificador N_{br} é monótona sob transformações locais como esperado de uma medida que tem como finalidade quantificar os recursos não-locais de um estado quântico. O resultados relacionados a este capítulo foram publicados recentemente e podem ser encontrados na revista Phys. Rev. A **97**, 012123 (2018).

4 NÃO-LOCALIDADE FRACA BASEADA EM REALISMO

É conhecido na literatura que medições fracas são capazes de ocasionar violações das desigualdades de Bell [112, 113], levando também à emergência da não-localidade quântica. Nesse capítulo apresentamos uma extensão do nosso conceito de não-localidade ao regime de medições fracas, a não-localidade fraca baseada em realismo (NFBR). Em analogia à não-localidade de Bell que se manifesta nesse cenário, pretendemos analisar o comportamento da NBR frente à implementação desse tipo de medição. Tomando como ponto de partida a discussão apresentada no capítulo anterior, introduzimos uma noção de não-localidade fraca que surge naturalmente quando substituímos o mapa de medição projetiva pelo recentemente definido processo de *monitoramento* [55], o qual refere-se a um mapa completamente positivo que preserva o traço e que é capaz de interpolar entre medições fracas e projetivas.

Matematicamente, o modelo de medições fracas definido pelo processo de monitoramento é descrito pelo mapa

$$M_O^\mathcal{E}(\rho) := (1 - \mathcal{E})\rho + \mathcal{E} \Phi_O(\rho), \quad (4.1)$$

para um parâmetro real $\mathcal{E} \in (0, 1)$, um estado ρ no espaço $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ e um observável genérico O atuando em \mathcal{H}_A ou \mathcal{H}_B . Note que este mapa interpola entre um regime de nenhuma medição, $M_O^{\mathcal{E} \rightarrow 0}(\rho) = \rho$, e um regime de medições projetivas não-reveladas, $M_O^{\mathcal{E} \rightarrow 1}(\rho) = \Phi_O(\rho)$. Entre os dois extremos de \mathcal{E} , isto é, para $0 < \mathcal{E} < 1$, o respectivo mapa representa processos de medições fracas não-reveladas. Uma aplicação direta da definição (4.1) evidencia uma propriedade interessante que relaciona os respectivos mapas de monitoramento e de medição projetiva. Verifica-se ainda que $M_O^\mathcal{E}(\Phi_O(\rho)) = (1 - \mathcal{E})\Phi_O(\rho) + \mathcal{E}\Phi_O(\rho) = \Phi_O(\rho)$ e $\Phi_O(M_O^\mathcal{E}(\rho)) = \Phi_O[(1 - \mathcal{E})\rho + \mathcal{E}\Phi_O(\rho)] = \Phi_O(\rho)$, isto é,

$$M_O^\mathcal{E}\Phi_O = \Phi_O M_O^\mathcal{E} = \Phi_O \quad (4.2)$$

o que nos mostra que $[M_O^\mathcal{E}, \Phi_O] = 0$, que uma aplicação de $M_O^\mathcal{E}$ não altera estados de realidade Φ_O e que a atuação de mapas de medição projetiva sobre $M_O^\mathcal{E}$ leva a estados de realidade. Outra propriedade interessante é a regra de aplicações sucessivas, a qual afirma que

$$[M_O^\mathcal{E}]^n(\rho) = (1 - \mathcal{E})^n \rho + [1 - (1 - \mathcal{E})^n] \Phi_O(\rho), \quad (4.3)$$

de modo que $[M_O^\mathcal{E}]^{n \rightarrow \infty}(\rho) = \Phi_O(\rho)$ mostrando que, infinitamente, muitos monitoramentos equivalem a uma medição projetiva não-revelada. Mais importantemente, a partir da monotonicidade e da subaditividade da entropia de von Neumann, é mostrado na referência [55] que $S(\Phi_O(\rho)) \geq S([M_O^\mathcal{E}]^n(\rho))$ para qualquer n finito com igualdade mantendo-se para $\rho = \Phi_O(\rho)$ e $\mathfrak{I}(A|\rho) \geq \mathfrak{I}(A|M_O^\mathcal{E}(\rho))$ para A atuando em \mathcal{H}_A . Essa relação é a afirmação da monotonicidade da irrealidade sob monitoramento local. Significa que em uma medição fraca de intensidade arbitrária, em qualquer localidade, a realidade de um observável nunca diminui, uma vez que sua irrealidade é que está decrescendo.

Relembrando a não-localidade para o contexto (A, B, ρ) , isto é, $\eta_{AB}(\rho) = S(\Phi_A(\rho)) + S(\Phi_B(\rho)) - S(\Phi_{AB}(\rho)) - S(\rho)$, é oportuno introduzir um quantificador genérico que engloba a noção de medições fracas, isto é,

$$\eta_{AB}^{\mathcal{E}\mathcal{E}'}(\rho) := S(M_A^\mathcal{E}(\rho)) + S(M_B^{\mathcal{E}'}(\rho)) - S(M_A^\mathcal{E}M_B^{\mathcal{E}'}(\rho)) - S(\rho), \quad (4.4)$$

onde $M_{A(B)}^{\mathcal{E}(\mathcal{E}')}$ representa o monitoramento local do observável $A(B)$ atuando em $\mathcal{H}_{A(B)}$ com intensidade $\mathcal{E}(\mathcal{E}')$ e $\{\mathcal{E}, \mathcal{E}'\} \in (0, 1)$. Note que a partir da definição acima, Eq.(4.4), é possível recuperarmos a forma simétrica da não-localidade de contexto. Para isso, basta verificarmos que $\eta_{AB}^{11}(\rho) = \eta_{AB}(\rho)$. Além disso, é possível notar também que $\eta_{AB}^{0\mathcal{E}'}(\rho) = S(\rho) + S(M_B^{\mathcal{E}'}(\rho)) - S(M_B^{\mathcal{E}'}(\rho)) - S(\rho) = 0$ e de modo análogo $\eta_{AB}^{\mathcal{E}0}(\rho) = 0$. Nos três procedimentos acima deve ser entendido que os termos $\eta_{AB}^{11}(\rho)$, $\eta_{AB}^{\mathcal{E}0}(\rho)$ e $\eta_{AB}^{0\mathcal{E}'}(\rho)$ foram calculados no limite em que \mathcal{E} tende para 0 ou 1.

Teorema 1 *Para qualquer operador densidade ρ atuando em $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, observável A atuando em \mathcal{H}_A , observável B atuando em \mathcal{H}_B e parâmetros reais $\{\mathcal{E}, \mathcal{E}'\} \in (0, 1)$, é verdade que $\eta_{AB}^{\mathcal{E}\mathcal{E}'}(\rho) \geq 0$, com igualdade para $\rho = \rho_A \otimes \rho_B$ ou $\rho = \Phi_{A(B)}(\rho)$.*

A prova desse teorema é obtida considerando-se um estado quadripartido $\sigma = U\sigma_0U^\dagger$

atuando no espaço $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_X \otimes \mathcal{H}_Y$ com transformação unitária $U = U_{AX}^\mathcal{E} \otimes U_{BY}^{\mathcal{E}'}$ e um estado inicial $\sigma_0 = \rho \otimes |x\rangle\langle x| \otimes |y\rangle\langle y|$. Para seguir com a prova, vamos considerar os observáveis $A = \sum_a a A_a$ e $B = \sum_b b B_b$ em \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , com projetores $A_a = |a\rangle\langle a|$ e $B_b = |b\rangle\langle b|$. Considere também os sistemas auxiliares $\rho_X = |x_0\rangle\langle x_0|$ em \mathcal{H}_X , $\rho_Y = |y_0\rangle\langle y_0|$ em \mathcal{H}_Y e transformações unitárias do tipo $U_{AX}^\mathcal{E}|a\rangle|x_0\rangle = |a\rangle|x_a\rangle$ e $U_{BY}^{\mathcal{E}'}|b\rangle|y_0\rangle = |b\rangle|y_b\rangle$. A partir dessas informações pode-se encontrar que

$$\begin{aligned} \sigma &= \left(U_{AX}^\mathcal{E} \otimes U_{BY}^{\mathcal{E}'} \right) \sigma_0 \left(U_{AX}^\mathcal{E} \otimes U_{BY}^{\mathcal{E}'} \right)^\dagger \\ &= \sum_{a,b} \sum_{a',b'} \langle ab | \rho | a'b' \rangle |a\rangle\langle a'| \otimes |b\rangle\langle b'| \otimes |x_a\rangle\langle x_{a'}| \otimes |y_b\rangle\langle y_{b'}|. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Antes de prosseguir com a prova do teorema 1, vale a pena lembrar que o mapa de monitoramento $M_A^\mathcal{E}(\rho)$ é uma expressão do teorema de Stinespring [31, 55]. O mesmo pode ser obtido através da regra

$$M_B^{\mathcal{E}'}(\rho) = \text{Tr}_Y \left[U_{BY}^{\mathcal{E}'} (\rho \otimes |y_0\rangle\langle y_0|) U_{BY}^{\mathcal{E}'\dagger} \right] = \sum_b B_b \rho B_b^\dagger,$$

de acordo com a representação do operador-soma para operações quânticas discutida no capítulo 2.

Voltando à nossa prova, podemos usar a Eq.(4.5) e a regra acima para mostrar que

$$\sigma_{ABX} = \text{Tr}_Y \sigma = U_{AX}^\mathcal{E} \left(M_B^{\mathcal{E}'}(\rho) \otimes |x_0\rangle\langle x_0| \right) U_{AX}^{\mathcal{E}\dagger}, \quad (4.6)$$

onde usando a mesma regra para $M_A^\mathcal{E}(\rho)$ e procedendo de modo análogo podemos encontrar que $\sigma_{ABY} = U_{BY}^{\mathcal{E}'} \left(M_A^\mathcal{E}(\rho) \otimes |y_0\rangle\langle y_0| \right) U_{BY}^{\mathcal{E}'\dagger}$ e $\sigma_{AB} = M_A^\mathcal{E} M_B^{\mathcal{E}'}(\rho)$.

Através da subaditividade forte da entropia de von Neumann, $S(\sigma_{abc}) + S(\sigma_c) \leq S(\sigma_{ac}) + S(\sigma_{bc})$ e adotando as identificações $a = X$, $b = Y$ e $c = AB$ podemos escrever

$$S(\sigma) + S(\sigma_{AB}) \leq S(\sigma_{ABX}) + S(\sigma_{ABY}). \quad (4.7)$$

Em seguida, devido à invariância unitária e à aditividade da entropia de von Neumann temos que $S(\sigma) = S(U\sigma_0 U^\dagger) = S(\rho)$, $S(\sigma_{ABX}) = S \left(U_{AX}^\mathcal{E} (M_B^{\mathcal{E}'}(\rho) \otimes |x_0\rangle\langle x_0|) U_{AX}^{\mathcal{E}\dagger} \right) =$

$S(M_B^{\mathcal{E}'}(\rho)), S(\sigma_{ABY}) = S(U_{BY}^{\mathcal{E}'}(M_A^{\mathcal{E}}(\rho) \otimes |y_0\rangle\langle y_0|)U_{BY}^{\mathcal{E}'\dagger}) = S(M_A^{\mathcal{E}}(\rho))$. Dessa forma, fazendo as respectivas substituições na Eq. (4.7) encontramos que

$$S(\rho) + S(M_A^{\mathcal{E}}M_B^{\mathcal{E}'}(\rho)) \leq S(M_B^{\mathcal{E}'}(\rho)) + S(M_A^{\mathcal{E}}(\rho)), \quad (4.8)$$

mostrando que $\eta_{AB}^{\mathcal{E}\mathcal{E}'}(\rho) \geq 0$, o que prova a primeira parte do teorema.

A segunda parte pode ser provada a partir da aditividade da entropia de von Neumann, da propriedade (4.2) e da definição (4.4) de modo que $\eta_{AB}^{\mathcal{E}\mathcal{E}'}(\rho_A \otimes \rho_B) = \eta_{AB}^{\mathcal{E}\mathcal{E}'}(\Phi_{A(B)}(\rho)) = 0$, o que completa a prova. É importante destacar que a igualdade também é mantida para $\mathcal{E} \rightarrow 0$ ou $\mathcal{E}' \rightarrow 0$, mas tais limites não estão inclusos na afirmação do teorema.

Agora, considerando-se as definições (4.1) e (4.4) é possível verificarmos que

$$\eta_{AB}^{\mathcal{E}1}(\rho) = S(M_A^{\mathcal{E}}(\rho)) + S(M_B^1(\rho)) - S(M_A^{\mathcal{E}}M_B^1(\rho)) - S(\rho),$$

onde $M_B^1(\rho) = \Phi_B(\rho)$ e $M_A^{\mathcal{E}}M_B^1(\rho) = M_A^{\mathcal{E}}\Phi_B(\rho)$. Da mesma forma, o termo $\eta_{AB}^{\mathcal{E}1}(M_B^{\mathcal{E}'}(\rho))$ fornece

$$\eta_{AB}^{\mathcal{E}1}(M_B^{\mathcal{E}'}(\rho)) = S(M_A^{\mathcal{E}}M_B^{\mathcal{E}'}(\rho)) + S(M_B^1M_B^{\mathcal{E}'}(\rho)) - S(M_A^{\mathcal{E}}M_B^1M_B^{\mathcal{E}'}(\rho)) - S(M_B^{\mathcal{E}'}(\rho)),$$

onde, de acordo com as Eqs. (4.1) e (4.2), temos que $M_B^1M_B^{\mathcal{E}'}(\rho) = \Phi_B M_B^{\mathcal{E}'}(\rho) = \Phi_B(\rho)$ e $M_A^{\mathcal{E}}M_B^1M_B^{\mathcal{E}'}(\rho) = M_A^{\mathcal{E}}\Phi_B(\rho)$. Dessa forma, levando em conta a diferença entre os dois termos calculados acima, temos que

$$\eta_{AB}^{\mathcal{E}1}(\rho) - \eta_{AB}^{\mathcal{E}1}(M_B^{\mathcal{E}'}(\rho)) = S(M_A^{\mathcal{E}}(\rho)) + S(M_B^{\mathcal{E}'}(\rho)) - S(M_A^{\mathcal{E}}M_B^{\mathcal{E}'}(\rho)) - S(\rho) = \eta_{AB}^{\mathcal{E}\mathcal{E}'}(\rho).$$

De modo análogo, considerando as Eqs. (4.1), (4.2) e (4.4) e o fato que $[M_A^{\mathcal{E}}, M_B^{\mathcal{E}'}] = [\Phi_A, \Phi_B] = 0$, verifica-se que $\eta_{AB}^{1\mathcal{E}'}(\rho) - \eta_{AB}^{1\mathcal{E}'}(M_A^{\mathcal{E}}(\rho)) = \eta_{AB}^{\mathcal{E}\mathcal{E}'}(\rho)$. Isso nos permite escrever a seguinte identidade

$$\eta_{AB}^{\mathcal{E}\mathcal{E}'}(\rho) = \eta_{AB}^{\mathcal{E}1}(\rho) - \eta_{AB}^{\mathcal{E}1}(M_B^{\mathcal{E}'}(\rho)) = \eta_{AB}^{1\mathcal{E}'}(\rho) - \eta_{AB}^{1\mathcal{E}'}(M_A^{\mathcal{E}}(\rho)), \quad (4.9)$$

a qual será utilizada ao longo desse trabalho.

4.1 DEFINIÇÃO DE NFBR

4.1.1 NFBR unidirecional

Vamos agora introduzir um quantificador que refere-se à implementação de medições fracas em uma parte do sistema. Isso é possível substituindo-se o mapa de medições projetivas na definição de irrealidade pelo mapa de monitoramento $M_B^\mathcal{E}$.

Definição 1 *A NFBR unidirecional de um operador densidade ρ atuando no espaço bipartido $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ é dada para um parâmetro real $\mathcal{E} \in (0, 1)$ por*

$$N_B^\mathcal{E}(\rho) := \max_{A,B} [\mathfrak{S}(A|\rho) - \mathfrak{S}(A|M_B^\mathcal{E}(\rho))] = \max_{A,B} \eta_{AB}^{1\mathcal{E}}(\rho). \quad (4.10)$$

Aspectos importantes dessa medida seguem diretamente do teorema 1. Primeiro, de acordo com o teorema 1, sendo $\eta_{AB}^{\mathcal{E}\mathcal{E}'}(\rho) \geq 0$ para quaisquer $0 < \mathcal{E}(\mathcal{E}') < 1$, então $N_B^\mathcal{E}(\rho)$ é não-negativa para qualquer $\mathcal{E} \in (0, 1)$ e ρ atuando em $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, pois $\eta_{AB}^{1\mathcal{E}}(\rho) \geq 0$. Segundo, do teorema 1 e da identidade (4.9) temos que

$$\eta_{AB}^{\mathcal{E}\mathcal{E}'}(\rho) = \eta_{AB}^{\mathcal{E}1}(\rho) - \eta_{AB}^{\mathcal{E}1}(M_B^{\mathcal{E}'}(\rho)) \geq 0,$$

onde no limite em que $\mathcal{E} \rightarrow 1$, podemos escrever $\eta_{AB}^{1\mathcal{E}}(\rho) = \eta_{AB}^{11}(\rho) - \eta_{AB}^{11}(M_B^\mathcal{E}(\rho)) \geq 0$. Relembrando que $\eta_{AB}^{11}(\rho) = \eta_{AB}(\rho)$, temos que $\eta_{AB}^{11}(\rho) - \eta_{AB}^{11}(M_B^\mathcal{E}(\rho)) \leq \eta_{AB}(\rho)$, o que nos permite escrever a relação $0 \leq \eta_{AB}^{1\mathcal{E}}(\rho) = \eta_{AB}^{11}(\rho) - \eta_{AB}^{11}(M_B^\mathcal{E}(\rho)) \leq \eta_{AB}(\rho)$, a partir da qual concluímos que

$$\eta_{AB}^{1\mathcal{E}}(\rho) \leq \eta_{AB}(\rho) \rightarrow \max_{A,B} \eta_{AB}^{1\mathcal{E}}(\rho) \leq \max_{A,B} \eta_{AB}(\rho) \rightarrow N_B^\mathcal{E}(\rho) \leq N_{\text{br}}(\rho), \quad (4.11)$$

onde a igualdade é mantida para estados descorrelacionados $\rho = \rho_A \otimes \rho_B$, caso em que tanto $N_B^\mathcal{E}(\rho)$ quanto $N(\rho)$ desaparecem simultaneamente.

Ainda, note que a simetria $A \rightleftharpoons B$ surgirá em $N_B^\mathcal{E}(\rho)$ somente se $\mathcal{E} \rightarrow 1$, caso em que $N_B^{\mathcal{E} \rightarrow 1} = N_{\text{br}}$. Além disso, o subíndice B e o termo *unidirecional* são necessários, pois $N_B^\mathcal{E}(\rho)$ e $N_A^\mathcal{E}(\rho)$ são, em geral, diferentes, pois representam medições fracas ocorrendo em sítios distintos, como podemos notar analisando a definição (4.10). Essas informações

reunidas são resumidas no seguinte resultado:

Resultado 1 *Com relação à NBR e à NFBR unidirecional é válido que*

$$0 \leq N_B^\mathcal{E}(\rho) \leq N_{\text{br}}(\rho), \quad (4.12)$$

para qualquer $\mathcal{E} \in (0, 1)$ e ρ atuando em $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, sendo a igualdade válida para estados descorrelacionados, $\rho = \rho_A \otimes \rho_B$.

Com relação à Eq. (4.10), o fato de que $N_B^{\mathcal{E} \rightarrow 0}(\rho) = 0$ para todo estado ρ levanta a questão de saber se esse objeto pode realmente ser entendido como um fiel quantificador de NBR. A partir da formulação matemática da definição 1, está claro que a NFBR unidirecional quantifica a máxima alteração dos elementos de realidade do sítio \mathcal{A} induzida por medições fracas realizadas remotamente no sítio \mathcal{B} .

De uma outra perspectiva, essa quantidade também pode ser vista como uma medida da quantidade máxima de irrealidade que pode ser destruída no sítio \mathcal{A} através de uma medição fraca conduzida no sítio \mathcal{B} . Essa interpretação explica facilmente o fato de que $N_B^{\mathcal{E} \rightarrow 0}(\rho) = 0$, uma vez que nenhuma perturbação implica em nenhuma alteração de irrealidade.

Existe, ainda, uma interpretação alternativa para $N_B^\mathcal{E}(\rho)$. Como visto antes, a partir da identidade (4.9) temos $\eta_{AB}^{1\mathcal{E}}(\rho) = \eta_{AB}^{11}(\rho) - \eta_{AB}^{11}(M_B^\mathcal{E}(\rho))$. Se tomarmos $\eta_{AB}^{11}(\rho)$ e $\eta_{AB}^{11}(M_B^\mathcal{E}(\rho))$ como quantificadores de NBR nos contextos (A, B, ρ) e $(A, B, M_B^\mathcal{E}(\rho))$, respectivamente, temos que $\eta_{AB}^{1\mathcal{E}}(\rho)$ pode ser interpretado como a quantidade de NBR que é destruída do contexto quando ρ é substituído por $M_B^\mathcal{E}(\rho)$.

Para estender essa interpretação à quantidade $N_B^\mathcal{E}$ vamos considerar que $A_\mathcal{E}$ e $B_\mathcal{E}$ são operadores que levam à maximização exigida, Eq.(4.10), na NFBR unidirecional para todo \mathcal{E} . Nesse caso, temos via identidade (4.9) e definição 1 que

$$N_B^\mathcal{E}(\rho) = \eta_{A_\mathcal{E}B_\mathcal{E}}^{1\mathcal{E}}(\rho) = \eta_{A_\mathcal{E}B_\mathcal{E}}^{11}(\rho) - \eta_{A_\mathcal{E}B_\mathcal{E}}^{11}(M_{B_\mathcal{E}}^\mathcal{E}(\rho)) \quad (4.13)$$

fornece a quantidade de NBR que é destruída na transição do contexto (A, B, ρ) para $(A, B, M_B^\mathcal{E}(\rho))$. Note que $N_B^{\mathcal{E} \rightarrow 0}(\rho) = \eta_{A_\mathcal{E}B_\mathcal{E}}^{10}(\rho) = 0$ indica que nenhuma NBR é destruída

quando nenhum distúrbio ocorre no outro sítio, enquanto

$$\begin{aligned}
N_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E} \rightarrow 1}(\rho) &= \eta_{A_1 B_1}^{11}(\rho) - \eta_{A_1 B_1}^{11}(M_{B_1}^1(\rho)) \\
&= \eta_{A_1 B_1}^{11}(\rho) - \eta_{A_1 B_1}^{11}(\Phi_{B_1}(\rho)) \\
&= S(\Phi_{A_1}(\rho)) + S(\Phi_{B_1}(\rho)) - S(\Phi_{A_1 B_1}(\rho)) - S(\rho) \\
&= N_{\text{br}}(\rho)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

revela que toda a NBR é removida na transição $(A_1, B_1, \rho) \rightarrow (A_1, B_1, \Phi_{B_1}(\rho))$, onde os observáveis A_1 e B_1 são aqueles que fornecem a maximização necessária para a NBR, de modo que $N_{\text{br}}(\rho) = \eta_{A_1 B_1}(\rho)$. Note ainda que $\eta_{A_1 B_1}^{11}(\Phi_{B_1}(\rho)) = 0$, já que $\Phi_{B_1}(\rho)$ é um estado de realidade para o observável B_1 . Além disso, vemos via Eqs. (4.1) e (4.2) que

$$N_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E} \rightarrow 1}(\Phi_{B_1}(\rho)) = \eta_{A_1 B_1}^{11}(\Phi_{B_1}(\rho)) - \eta_{A_1 B_1}^{11}(M_{B_1}^1 \Phi_{B_1}(\rho)) = 0. \tag{4.15}$$

Portanto, baseado na discussão acima, vemos que $N_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\rho)$ deve ser considerado como a quantidade máxima de NBR suprimida do estado ρ através de medições fracas realizadas localmente em uma das partições do espaço.

4.1.2 Estados puros

No que diz respeito aos estados puros, prova-se o seguinte resultado:

Resultado 2 *Considere $\zeta = |\psi\rangle\langle\psi|$, atuando sobre $\mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$, um operador densidade puro e $\mathcal{E} \in (0, 1)$ um parâmetro real. A NFBR unidirecional é limitada como*

$$\mathcal{E}E(\zeta) \leq N_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\zeta) \leq E(\zeta), \tag{4.16}$$

onde $E(\zeta) = S(\text{Tr}_{\mathcal{A}} \zeta) = S(\text{Tr}_{\mathcal{B}} \zeta)$ é a entropia de emaranhamento de $|\psi\rangle$.

A prova da quota superior segue diretamente do resultado (4.12), uma vez que para estados puros temos que $N_{\text{br}}(\zeta) = E(\zeta)$, como foi visto na discussão do capítulo anterior. A quota inferior pode ser provada a partir da definição 1, Eq. (4.10), com a qual podemos

escrever

$$N_B^\mathcal{E}(\zeta) = \max_{A,B} \left[\mathfrak{S}(A|\zeta) - \mathfrak{S}(A|M_B^\mathcal{E}(\zeta)) \right],$$

sendo que na irrealidade $\mathfrak{S}(A|\zeta)$, temos $S(\zeta) = 0$ já que ζ é puro. Assim, a equação acima fica

$$N_B^\mathcal{E}(\zeta) = \max_{A,B} \left\{ S(\Phi_A(\zeta)) - \left[S(\Phi_A M_B^\mathcal{E}(\zeta)) - S(M_B^\mathcal{E}(\zeta)) \right] \right\}$$

que pode ser reescrita considerando a relação de monotonicidade $S(\Phi_A \Phi_B(\zeta)) \geq S(\Phi_A M_B^\mathcal{E}(\zeta))$, isto é,

$$\begin{aligned} N_B^\mathcal{E}(\zeta) &\geq \max_{A,B} \left\{ S(\Phi_A(\zeta)) - \left[S(\Phi_A \Phi_B(\zeta)) - S(M_B^\mathcal{E}(\zeta)) \right] \right\} \\ &\geq \max_{A,B} \left\{ S(M_B^\mathcal{E}(\zeta)) - \left[S(\Phi_A \Phi_B(\zeta)) - S(\Phi_A(\zeta)) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

com igualdade mantida para $\Phi_B(\zeta) = M_B^\mathcal{E}(\zeta)$. Uma vez que o termo entre colchetes é não-negativo, a maximização ocorrerá para os operadores de Schmidt $A_S = \sum_i a_i |a_i\rangle\langle a_i|$ e $B_S = \sum_i b_i |b_i\rangle\langle b_i|$, cujos autoestados definem a decomposição $|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{\lambda_i} |a_i\rangle |b_i\rangle$, pois nesse caso o termo entre colchetes será nulo como será mostrado a seguir. Para ver isso, considere o operador densidade

$$\zeta = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{ij} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} |a_i\rangle |b_i\rangle \langle a_j| \langle b_j| \quad (4.18)$$

e os mapas de medição projetiva $\Phi_{A_S}(\zeta) = \sum_k (P_{A_S}^k \otimes \mathbb{1}_{B_S}) \zeta (P_{A_S}^k \otimes \mathbb{1}_{B_S})$ e $\Phi_{B_S}(\zeta) = \sum_k (\mathbb{1}_{A_S} \otimes P_{B_S}^k) \zeta (\mathbb{1}_{A_S} \otimes P_{B_S}^k)$, onde os termos $P_{A_S}^k = |a_k\rangle\langle a_k|$ e $P_{B_S}^k = |b_k\rangle\langle b_k|$ são os projetores de medição em cada subespaço e $\mathbb{1}_{A_S(B_S)}$ é o operador identidade em $\mathcal{H}_{A(B)}$.

Assim, encontramos que

$$\Phi_{A_S}(\zeta) = \sum_k (P_{A_S}^k \otimes \mathbb{1}_{B_S}) \zeta (P_{A_S}^k \otimes \mathbb{1}_{B_S}) = \sum_i \lambda_i |a_i\rangle\langle a_i| \otimes |b_i\rangle\langle b_i| \quad (4.19)$$

e de modo análogo

$$\Phi_{A_S} \Phi_{B_S}(\zeta) = \sum_k (P_{A_S}^k \otimes \mathbb{1}_{B_S}) \Phi_{B_S}(\zeta) (P_{A_S}^k \otimes \mathbb{1}_{B_S}) = \sum_i \lambda_i |a_i\rangle\langle a_i| \otimes |b_i\rangle\langle b_i|, \quad (4.20)$$

onde pode ser visto que $\Phi_{A_S}(\zeta)$ e $\Phi_{A_S}\Phi_{B_S}(\zeta)$ possuem os mesmos autovalores λ_i . Dessa forma, vemos via teorema da entropia conjunta [31] que $S(\Phi_{A_S}(\zeta)) = S(\Phi_{A_S}\Phi_{B_S}(\zeta)) = H(\lambda_i) = -\sum_i \lambda_i \ln \lambda_i$. Então, fica claro que $S(\Phi_{A_S}\Phi_{B_S}(\zeta)) - S(\Phi_{A_S}(\zeta)) = 0$. Logo, a Eq.(4.17) é reescrita como

$$N_B^\mathcal{E}(\zeta) \geq S(M_{B_S}^\mathcal{E}(\zeta)). \quad (4.21)$$

Agora, usando a definição de $M_{B_S}^\mathcal{E}$ e a concavidade da entropia de von Neumann, encontramos

$$S((1-\mathcal{E})\zeta + \mathcal{E}\Phi_{B_S}(\zeta)) \geq (1-\mathcal{E})S(\zeta) + \mathcal{E}S(\Phi_{B_S}(\zeta)) \rightarrow S(M_{B_S}^\mathcal{E}(\zeta)) \geq \mathcal{E}S(\Phi_{B_S}(\zeta)), \quad (4.22)$$

sendo $S(\zeta) = 0$. Desse modo, vemos que $N_B^\mathcal{E}(\zeta) \geq \mathcal{E}S(\Phi_{B_S}(\zeta))$. Por fim, a observação de $S(\Phi_{B_S}(\zeta)) = S(\text{Tr}_A \zeta) = S(\text{Tr}_B \zeta) = E(\zeta)$ completa a prova. Portanto, vemos a partir deste resultado que, no que diz respeito a estados puros, o emaranhamento acaba sendo uma condição necessária para a existência da NFBR unidirecional.

4.1.3 Exemplo

Como estudo de caso vamos considerar o estado de dois qubits de dois parâmetros

$$\rho^{\alpha\mu} = (1-\mu)\frac{\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}}{4} + \mu|\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|, \quad (4.23)$$

onde $|\psi_\alpha\rangle = \sqrt{\alpha}|+-\rangle - \sqrt{1-\alpha}| - + \rangle$ e $\{\alpha, \mu\} \in [0, 1]$.

Primeiramente, focaremos no estado $\rho^{\frac{1}{2}\mu}$ que corresponde ao estado de Werner

$$\rho^{\frac{1}{2}\mu} = (1-\mu)\frac{\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}}{4} + \mu|\psi_{1/2}\rangle\langle\psi_{1/2}|, \quad (4.24)$$

sendo $|\psi_{1/2}\rangle = \frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}}$ o estado singleto. Para computar a NFBR unidirecional, consideramos os observáveis genéricos do tipo $A = \hat{a} \cdot \vec{\sigma}$ onde $\hat{a} = \hat{a}(\theta_a, \phi_a)$ é um vetor unitário com direção especificada pelos ângulos polar e azimutal e cujos autoestados são

$$|\hat{a} \cdot \vec{\sigma}; +\rangle = \cos \frac{\theta_a}{2} |+\rangle + e^{i\phi_a} \sin \frac{\theta_a}{2} |-\rangle \quad (4.25)$$

e

$$|\hat{a} \cdot \vec{\sigma}; -\rangle = -\sin \frac{\theta_a}{2} |+\rangle + e^{i\phi_a} \cos \frac{\theta_a}{2} |-\rangle \quad (4.26)$$

com igual parametrização para o observável B em termos dos ângulos θ_b e ϕ_b . Levando em conta a Eq. (4.4), temos que

$$\eta_{AB}^{1\mathcal{E}}(\rho^{\frac{1}{2}\mu}) = S(M_A^1(\rho^{\frac{1}{2}\mu})) + S(M_B^{\mathcal{E}}(\rho^{\frac{1}{2}\mu})) - S(M_A^1 M_B^{\mathcal{E}}(\rho^{\frac{1}{2}\mu})) - S(\rho^{\frac{1}{2}\mu}), \quad (4.27)$$

onde a partir da definição de $M_O^{\mathcal{E}}(\rho)$ verificamos que $M_A^1(\rho^{\frac{1}{2}\mu}) = \Phi_A(\rho^{\frac{1}{2}\mu})$, $M_B^{\mathcal{E}}(\rho^{\frac{1}{2}\mu}) = (1 - \mathcal{E})\rho^{\frac{1}{2}\mu} + \mathcal{E}\Phi_B(\rho^{\frac{1}{2}\mu})$ e $M_A^1 M_B^{\mathcal{E}}(\rho^{\frac{1}{2}\mu}) = (1 - \mathcal{E})\Phi_A(\rho^{\frac{1}{2}\mu}) + \mathcal{E}\Phi_{AB}(\rho^{\frac{1}{2}\mu})$. Assim, vemos que o passo seguinte consiste em determinar os mapas de medição projetiva, os quais são dados por:

$$\begin{aligned} \Phi_A(\rho^{\frac{1}{2}\mu}) &= \sum_{a=\pm} (P_a \otimes \mathbb{1}_B) \rho^{\frac{1}{2}\mu} (P_a \otimes \mathbb{1}_B); \\ \Phi_B(\rho^{\frac{1}{2}\mu}) &= \sum_{b=\pm} (\mathbb{1}_A \otimes P_b) \rho^{\frac{1}{2}\mu} (\mathbb{1}_A \otimes P_b); \\ \Phi_{AB}(\rho^{\frac{1}{2}\mu}) &= \sum_{a=\pm} (P_a \otimes \mathbb{1}_B) \Phi_B(\rho^{\frac{1}{2}\mu}) (P_a \otimes \mathbb{1}_B). \end{aligned}$$

Observe que nas expressões acima $P_a = |\hat{a} \cdot \vec{\sigma}; \pm\rangle \langle \hat{a} \cdot \vec{\sigma}; \pm|$ e $P_b = |\hat{b} \cdot \vec{\sigma}; \pm\rangle \langle \hat{b} \cdot \vec{\sigma}; \pm|$ são os projetores de medição definidos em termos dos autoestados de A e B , respectivamente.

Com a informação acima sobre os mapas de medição projetiva foi possível computar analiticamente as entropias de von Neumann na Eq. (4.27), o que forneceu os autovalores $\left\{ \frac{1-\mu}{4}, \frac{1-\mu}{4}, \frac{1-\mu}{4}, \frac{1+3\mu}{4} \right\}$ para $\rho^{\frac{1}{2}\mu}$, $\left\{ \frac{1\pm\mu}{4} \right\}$ com cada autovalor duplamente degenerado para $M_A^1(\rho^{\frac{1}{2}\mu})$, $\left\{ \frac{1-\mu}{4}, \frac{1-\mu}{4}, \frac{1+\mu(3-2\mathcal{E})}{4}, \frac{1-\mu(1-2\mathcal{E})}{4} \right\}$ para $M_B^{\mathcal{E}}(\rho^{\frac{1}{2}\mu})$ e os autovalores $\left\{ \frac{4\pm\mu\sqrt{16+2\mathcal{E}(\mathcal{E}-2)(5-r)}}{16} \right\}$ também com dupla degenerescência para cada autovalor para o mapa $M_A^1 M_B^{\mathcal{E}}(\rho^{\frac{1}{2}\mu})$.

Dessa forma, com os autovalores descritos acima somos capazes de escrever uma expressão analítica para $\eta_{AB}^{1\mathcal{E}}(\rho^{\frac{1}{2}\mu})$, porém a mesma não será exposta por se tratar de uma expressão muito extensa e não essencial para a presente discussão. É interessante observar que no último conjunto de autovalores, o parâmetro r corresponde a uma soma de funções angulares, qual seja

$$r = F(\theta_a, \phi_a, \theta_b, \phi_b) + G(\theta_a, \phi_a, \theta_b, \phi_b) \quad (4.28)$$

sendo $F(\theta_a, \phi_a, \theta_b, \phi_b) = \cos 2\theta_b + \cos 2\theta_a(1 + 3 \cos 2\theta_b) + 4 \cos 2(\phi_a - \phi_b) \sin^2 \theta_a \sin^2 \theta_b$ e $G(\theta_a, \phi_a, \theta_b, \phi_b) = 4 \cos(\phi_a - \phi_b) \sin 2\theta_a \sin 2\theta_b$, onde foi verificado numericamente que $r \in [-3, 5]$. Note que o processo de maximização exigido pela NFBR unidirecional é determinado pelo termo r . Uma forma de obter tal informação é verificando se existe uma relação monótona entre $\eta_{AB}^{1\mathcal{E}}(\rho^{\frac{1}{2}\mu})$ e o parâmetro r , o que pode ser visto através do estudo do sinal da derivada em relação a r , onde

$$\frac{\partial}{\partial r} \eta_{AB}^{1\mathcal{E}}(\rho^{\frac{1}{2}\mu}) = - \frac{\mu \mathcal{E} (\mathcal{E} - 2) \operatorname{arctanh} \left[\mu \sqrt{8 - \mathcal{E}(\mathcal{E} - 2)(r - 5)/2\sqrt{2}} \right]}{4\sqrt{16 - 2\mathcal{E}(\mathcal{E} - 2)(r - 5)}}. \quad (4.29)$$

Para analisar o sinal dessa expressão, basta notar que $\mu, \mathcal{E} \in [0, 1]$ e $r \in [-3, 5]$, de modo que $\mathcal{E}(\mathcal{E} - 2) \leq 0$ e $(r - 5) \leq 0$. Consequentemente, isso faz com que o termo $\mathcal{E}(\mathcal{E} - 2)(r - 5)$ dentro das raízes seja não-negativo, ou seja, $\mathcal{E}(\mathcal{E} - 2)(r - 5) \geq 0$, o que preserva a condição de existência das raízes e da própria equação em si. Assim, fica evidente que o sinal da derivada é determinado pelo termo $(\mathcal{E} - 2) < 0$ no numerador, o que mostra que $\frac{\partial}{\partial r} \eta_{AB}^{1\mathcal{E}}(\rho^{\frac{1}{2}\mu}) \geq 0$ para quaisquer valores de μ, \mathcal{E} e r . Essa análise mostra que a quantidade $\eta_{AB}^{1\mathcal{E}}(\rho^{\frac{1}{2}\mu})$ cresce monotonicamente com r , sendo máxima em $r = 5$, uma vez que o valor $r = -3$ é um ponto de mínimo conforme pode ser visto da derivada acima. Além disso, como pode ser visto da Eq. (4.28), vemos que $r = 5$ para $\theta_a = \theta_b = 0$ implicando que para os observáveis A e B temos

$$A = \hat{a} \cdot \vec{\sigma} = \sum_{i=1}^3 a_i \sigma_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_a & e^{-i\phi_a} \sin \theta_a \\ e^{i\phi_a} \sin \theta_a & -\cos \theta_a \end{pmatrix} = \sigma_z, \quad (4.30)$$

e de forma análoga para o observável B . Isso nos diz que a maximização de $\eta_{AB}^{1\mathcal{E}}(\rho^{\frac{1}{2}\mu})$ na Eq. (4.10) é atingida para a escolha $A = B = \sigma_z$. Desse modo, após toda a discussão acima, temos que a NFBR unidirecional pode ser escrita na forma

$$N_B^{\mathcal{E}}(\rho^{\frac{1}{2}\mu}) = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (-1)^j \lambda_{ij} \ln \lambda_{ij}, \quad (4.31)$$

onde $\lambda_{ij} = 1 + \mu [4i - 1 + 2j\mathcal{E}(1 - 2i)]$. Este resultado é mostrado na Fig. 4.1 onde podemos ver que, de fato, a NFBR unidirecional tem o comportamento esperado, isto é, ela

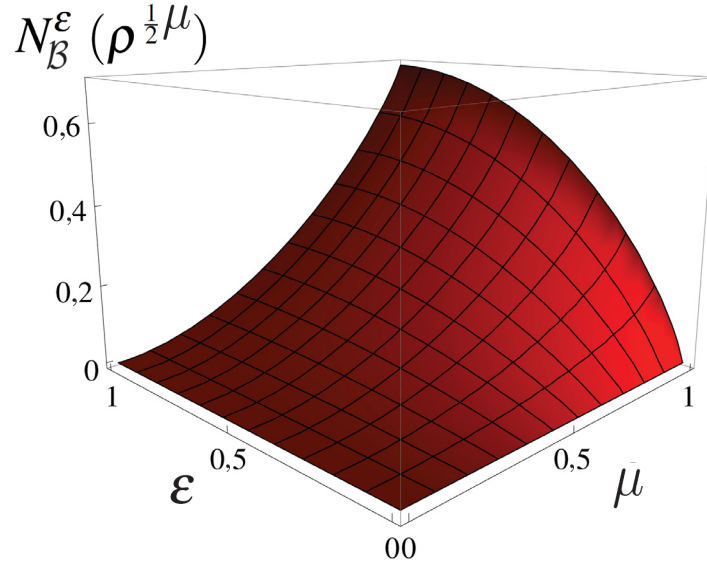


Figura 4.1: Ilustração do resultado 1. Aqui, exibimos o gráfico da NFBR unidirecional $N_B^E(\rho^{\frac{1}{2}\mu})$ descrita pela Eq. (4.31) para o estado $\rho^{\frac{1}{2}\mu}$ como função de μ e de \mathcal{E} . Claramente, vemos que $N_B^E(\rho^{\frac{1}{2}\mu}) < N_B^{\mathcal{E} \rightarrow 1}(\rho^{\frac{1}{2}\mu}) = N_{\text{br}}(\rho^{\frac{1}{2}\mu})$ para todo $\mathcal{E} \in (0, 1)$. Isso pode ser visualizado observando que em $\mathcal{E} = 1$ temos exatamente a curva que representa a NBR, enquanto que a NFBR unidirecional ocorre para valores de $\mathcal{E} < 1$. Além disso, temos que $N_B^{\mathcal{E} \rightarrow 0}(\rho^{\frac{1}{2}\mu}) = 0$.

é menor que a NBR. Note que assim como está previsto no resultado 1, temos de fato que $N_B^E(\rho^{\frac{1}{2}\mu}) < N_B^{\mathcal{E} \rightarrow 1}(\rho^{\frac{1}{2}\mu}) = N_{\text{br}}(\rho^{\frac{1}{2}\mu})$ para todo $\mathcal{E} \in (0, 1)$ e desaparece no limite em que $\mathcal{E} \rightarrow 0$, ou seja, $N_B^{\mathcal{E} \rightarrow 0}(\rho^{\frac{1}{2}\mu}) = 0$. Ainda, para o estado sob estudo, foi verificado que $N_B^E(\rho^{\frac{1}{2}\mu}) = N_A^E(\rho^{\frac{1}{2}\mu})$.

Agora, voltando ao estado de dois qubits de dois parâmetros dado pela Eq. (4.23), vamos considerar o estado puro $\rho^{\alpha 1} = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ com $|\psi_1\rangle = \sqrt{\alpha}|+-\rangle - \sqrt{1-\alpha}| - + \rangle$, de modo que

$$\rho^{\alpha 1} = \alpha|+-\rangle\langle+-| - \sqrt{\alpha(1-\alpha)}|+-\rangle\langle-+| - \sqrt{\alpha(1-\alpha)}|-+\rangle\langle+-| + (1-\alpha)|-+\rangle\langle-+|. \quad (4.32)$$

Nesse caso, ao invés de buscarmos a maximização analítica demandada pela NFBR unidirecional, que é muito mais complicado para $\rho^{\alpha 1}$, procederemos por similaridade. Está mostrado na referência [54] que

$$\min_{A,B} \eta_{AB}^{11}(\rho) = \eta_{A_S \tilde{B}_S}^{11}(\rho) = 0 \quad (4.33)$$

para qualquer estado puro $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, o operador de Schmidt A_S e o observável maximamente incompatível \tilde{B}_S , isto é, aquele para o qual o comutador de B_S e \tilde{B}_S é máximo, de modo que seus autovetores formam bases mutuamente neutras, do inglês *mutually unbiased bases* (MUB) [114]. Por outro lado, está mostrado no capítulo anterior que

$$\max_{A,B} \eta_{AB}^{11}(\rho) = \eta_{A_S B_S}^{11}(\rho) = E(\rho) \quad (4.34)$$

para operadores de Schmidt $A = A_S$ e $B = B_S$. No primeiro caso, tomando os observáveis $A = \sigma_z$ e $B = \sigma_x$, encontramos que $\eta_{\sigma_z \sigma_x}^{1\mathcal{E}}(\rho^{\alpha 1}) = 0$ para $\mathcal{E} \in (0, 1)$, como mostrado pela Eq. (4.33). Já no segundo caso, seguindo o que foi evidenciado na discussão anterior, tomaremos $A = \sigma_z$ e $B = \sigma_z$ para atingir a maximização exigida pela NFBR unidirecional. Dessa forma, podemos escrever que

$$N_B^{\mathcal{E}}(\rho^{\alpha 1}) = \eta_{\sigma_z \sigma_z}^{1\mathcal{E}}(\rho^{\alpha 1}) = S(M_{\sigma_z}^1(\rho^{\alpha 1})) + S(M_{\sigma_z}^{\mathcal{E}}(\rho^{\alpha 1})) - S(M_{\sigma_z}^1 M_{\sigma_z}^{\mathcal{E}}(\rho^{\alpha 1})) - S(\rho^{\alpha 1}),$$

onde $S(\rho^{\alpha 1}) = 0$. Agora, pelas Eqs. (4.1) e (4.2), temos que $M_{\sigma_z}^1(\rho^{\alpha 1}) = \Phi_{\sigma_z}(\rho^{\alpha 1})$, $M_{\sigma_z}^{\mathcal{E}}(\rho^{\alpha 1}) = (1 - \mathcal{E})(\rho^{\alpha 1}) + \mathcal{E}\Phi_{\sigma_z}(\rho^{\alpha 1})$ e $M_{\sigma_z}^1 M_{\sigma_z}^{\mathcal{E}}(\rho^{\alpha 1}) = \Phi_{\sigma_z} M_{\sigma_z}^{\mathcal{E}}(\rho^{\alpha 1}) = \Phi_{\sigma_z}(\rho^{\alpha 1})$, sendo os mapas de medição projetiva dados por:

$$\Phi_{\sigma_{z_1}}(\rho^{\alpha 1}) = \sum_{k=\pm} (P_{1k} \otimes \mathbb{1}_2) \rho^{\alpha 1} (P_{1k} \otimes \mathbb{1}_2);$$

$$\Phi_{\sigma_{z_2}}(\rho^{\alpha 1}) = \sum_{k=\pm} (\mathbb{1}_1 \otimes P_{2k}) \rho^{\alpha 1} (\mathbb{1}_1 \otimes P_{2k});$$

$$\Phi_{\sigma_{z_1}} \Phi_{\sigma_{z_2}} = \sum_{k=\pm} (P_{1k} \otimes \mathbb{1}_2) \Phi_{\sigma_{z_2}} (P_{1k} \otimes \mathbb{1}_2).$$

Em seguida, após calcular analiticamente as entropias de von Neumann necessárias, encontramos que a NFBR unidirecional para o estado $\rho^{\alpha 1}$ é

$$N_B^{\mathcal{E}}(\rho^{\alpha 1}) = -\ln \sqrt{\Omega_{\mathcal{E}}} - \sqrt{1 - 4\Omega_{\mathcal{E}}} \operatorname{arctanh} \left(\sqrt{1 - 4\Omega_{\mathcal{E}}} \right), \quad (4.35)$$

onde $\Omega_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\alpha(2 - \mathcal{E})(1 - \alpha)$. Ainda, foi verificado que esse resultado leva corretamente a $N_B^{\mathcal{E} \rightarrow 0}(\rho^{\alpha 1}) = 0$ no limite em que $\mathcal{E} \rightarrow 0$ e também que $N_B^{\mathcal{E} \rightarrow 1}(\rho^{\alpha 1}) = E(\rho^{\alpha 1}) = -\alpha \ln \alpha -$

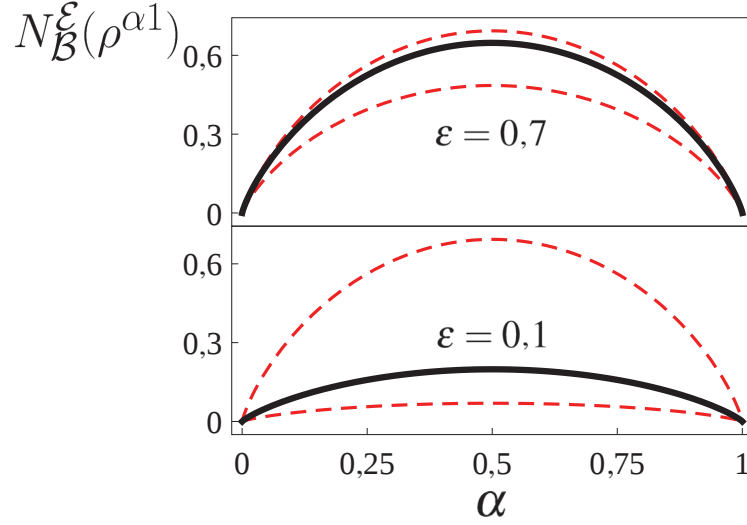


Figura 4.2: Ilustração do resultado 2. Aqui, exibimos o gráfico da NFBR unidirecional $N_B^E(\rho^{\alpha 1})$ (linha preta) para o estado puro $\rho^{\alpha 1}$, sendo exibido no painel superior o caso para $\mathcal{E} = 0.7$ e no painel inferior o caso para $\mathcal{E} = 0.1$. Em cada painel, as linhas vermelhas tracejadas superiores denotam o limite superior da entropia de emaranhamento $E(\rho^{\alpha 1})$, enquanto as inferiores denotam o limite inferior $\mathcal{E}E(\rho^{\alpha 1})$, como indicado no resultado 2.

$(1-\alpha) \ln(1-\alpha)$ no limite em que $\mathcal{E} \rightarrow 1$, onde $E(\rho^{\alpha 1}) = S(\text{Tr}_{1(2)}\rho^{\alpha 1})$ fornece exatamente o mesmo resultado. De fato, esse resultado mostra que no caso do estado puro considerado, $N_B^{\mathcal{E} \rightarrow 1}(\rho^{\alpha 1}) = N_{\text{br}}(\rho^{\alpha 1}) = E(\rho^{\alpha 1})$ em concordância com o resultado 2. Além disso, vale ressaltar que $N_B^{\mathcal{E}}(\rho^{\alpha 1}) = N_A^{\mathcal{E}}(\rho^{\alpha 1})$. Esses resultados são mostrados na Fig. 4.2.

4.2 FORMA SIMÉTRICA

Nessa seção vamos analisar uma versão simétrica da NFBR, isto é, um quantificador que é associado com medições fracas em ambos os sítios. Conceitualmente, ele pode ser construído a partir do quantificador de realidade definido na referência [55],

$$\Delta \mathfrak{R}_A^{\mathcal{E}}(\rho) := S(M_A^{\mathcal{E}}(\rho)) - S(\rho), \quad (4.36)$$

o qual fornece o aumento fraco na realidade de um observável A monitorado para uma dada preparação ρ . Claramente, pode-se notar que a realidade não aumenta quando $\mathcal{E} \rightarrow 0$, pois $S(M_A^{\mathcal{E} \rightarrow 0}(\rho)) = S(\rho)$. Por outro lado, ela tem um aumento máximo de $\mathfrak{S}(A|\rho)$ quando $\mathcal{E} \rightarrow 1$ uma vez que $S(M_A^{\mathcal{E} \rightarrow 1}(\rho)) = S(\Phi(\rho))$. Aqui, apresentamos uma proposta que

introduz uma medida que quantifica por quanto a realidade aumenta quando uma medição fraca de um observável B é conduzida remotamente no sítio \mathcal{B} .

Definição 2 A não-localidade fraca simétrica baseada em realismo (NFSBR) de um operador densidade ρ atuando em $\mathcal{H}_A \otimes H_B$ é definida, para parâmetros reais $\{\mathcal{E}, \mathcal{E}'\} \in (0, 1)$ por

$$N^{\mathcal{E}\mathcal{E}'}(\rho) := \max_{A,B} [\Delta \mathfrak{R}_A^{\mathcal{E}}(\rho) - \Delta \mathfrak{R}_A^{\mathcal{E}}(M_B^{\mathcal{E}'}(\rho))] = \max_{A,B} \eta_{AB}^{\mathcal{E}\mathcal{E}'}(\rho). \quad (4.37)$$

Observe que esta medida restaura a simetria $A \rightleftharpoons B$ para $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$,

$$\eta_{AB}^{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\rho) = S(M_A^{\mathcal{E}}(\rho)) + S(M_B^{\mathcal{E}}(\rho)) - S(M_A^{\mathcal{E}}(M_B^{\mathcal{E}}(\rho))) - S(\rho),$$

e fornece a NBR quando $\mathcal{E} = \mathcal{E}' \rightarrow 1$, pois $\eta_{AB}^{11}(\rho) = \eta_{AB}(\rho)$, de modo que após a maximização temos $N^{\mathcal{E}\mathcal{E}'}(\rho) = N_{\text{br}}(\rho)$. Além disso, é verificado diretamente a partir da definição 2 que $N^{1\mathcal{E}}(\rho) = N_B^{\mathcal{E}}(\rho)$, $N^{\mathcal{E}1}(\rho) = N_A^{\mathcal{E}}(\rho)$ e $N^{0\mathcal{E}}(\rho) = N^{\mathcal{E}0}(\rho) = 0$, o que mostra que a NFSBR fornece uma unificação das medidas de NBR. A seguir, considerando o teorema 1, identidade (4.9) e o resultado 1 (4.12) apresentaremos nosso terceiro resultado.

Resultado 3 Com relação à NFSBR (Eq. 4.37), à NFBR unidirecional (Eq. 4.10) e à NBR (Eq. 3.4) é mantida a desigualdade

$$0 \leq N^{\mathcal{E}\mathcal{E}'}(\rho) \leq N_{\mathcal{A}(\mathcal{B})}^{\mathcal{E}(\mathcal{E}')}(\rho) \leq N_{\text{br}}(\rho) \quad (4.38)$$

para qualquer $\mathcal{E}(\mathcal{E}') \in (0, 1)$ e ρ atuando em $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, com igualdade válida para $\rho = \rho_A \otimes \rho_B$.

Para provar esse resultado, lembre que de acordo com a identidade (4.9) temos que $\eta_{AB}^{\mathcal{E}\mathcal{E}'}(\rho) = \eta_{AB}^{1\mathcal{E}}(\rho) - \eta_{AB}^{1\mathcal{E}}(M_B^{\mathcal{E}'}(\rho))$. Em seguida, observe que $\eta_{AB}^{1\mathcal{E}}(\rho) - \eta_{AB}^{1\mathcal{E}}(M_B^{\mathcal{E}'}(\rho)) \leq \eta_{AB}^{1\mathcal{E}}(\rho)$. Logo, é correto escrevermos que $\eta_{AB}^{\mathcal{E}\mathcal{E}'}(\rho) \leq \eta_{AB}^{1\mathcal{E}}(\rho)$ de modo que ao efetuarmos os processos de maximização, concluímos que $N^{\mathcal{E}\mathcal{E}'}(\rho) \leq N_B^{\mathcal{E}}(\rho)$. Por fim, vemos pelo teorema 1 que $\eta_{AB}^{\mathcal{E}\mathcal{E}'}(\rho) \geq 0 \rightarrow N^{\mathcal{E}\mathcal{E}'}(\rho) \geq 0$, enquanto que pelo resultado 1 temos $N_B^{\mathcal{E}}(\rho) \leq N(\rho)$, o que completa a prova. Em relação ao significado da NFSBR, podemos interpretar por meio da identidade (4.9) que $N^{\mathcal{E}\mathcal{E}'}(\rho)$ corresponde à quantidade de NBR relativa ao estado ρ que é destruída em medições fracas de intensidades \mathcal{E} e \mathcal{E}' realizadas no sítios distantes \mathcal{A} e \mathcal{B} , respectivamente.

4.2.1 Exemplo

Vamos novamente considerar o estado de Werner $\rho^{\frac{1}{2}\mu}$, Eq. (4.24), e assumir que a NFSBR é dada por

$$N^{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\rho^{\frac{1}{2}\mu}) = \eta_{\sigma_r\sigma_s}^{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\rho^{\frac{1}{2}\mu}), \quad (4.39)$$

com $r = s \in \{x, y, z\}$ e $\sigma_{r(s)}$ sendo as matrizes de Pauli. Essa conjectura é baseada em várias incursões analíticas através das quais verificamos que os menores valores da NFSBR ocorrem para $r \neq s$. Além disso, o resultado analítico obtido a partir da conjectura acima mostra corretamente que $N^{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\rho^{\frac{1}{2}\mu}) = N_{\text{br}}(\rho^{\frac{1}{2}\mu})$ no limite em que $\mathcal{E} \rightarrow 1$ e que $N^{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\rho^{\frac{1}{2}\mu}) = 0$ quando $\mathcal{E} \rightarrow 0$.

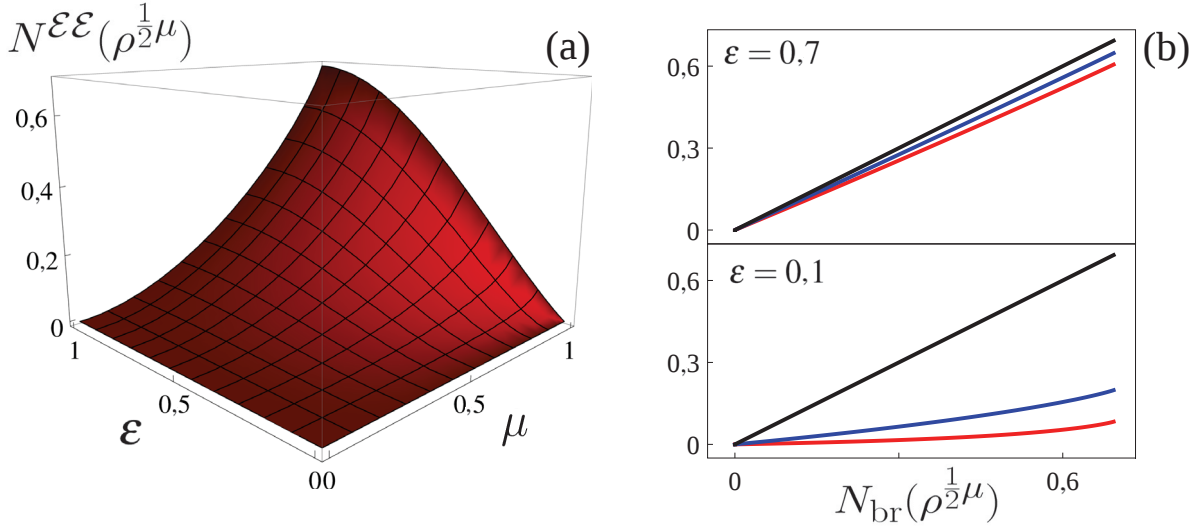


Figura 4.3: (a) Ilustração do resultado 3. NFSBR como função μ e \mathcal{E} para o estado $\rho^{\frac{1}{2}\mu}$. A comparação do gráfico acima com o resultado exibido para a NFBR unidirecional (Fig. 4.1) para o mesmo estado confirma que $N^{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\rho^{\frac{1}{2}\mu}) \leq N_B^{\mathcal{E}}(\rho^{\frac{1}{2}\mu})$. (b) Gráfico paramétrico de $N(\rho^{\frac{1}{2}\mu})$ (linha preta), $N_B^{\mathcal{E}}(\rho^{\frac{1}{2}\mu})$ (linha azul) e $N^{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\rho^{\frac{1}{2}\mu})$ (linha vermelha) como função de $N_{\text{br}}(\rho^{\frac{1}{2}\mu})$ para $\mathcal{E} = 0,1$ (painel inferior) e $\mathcal{E} = 0,7$ (painel superior). Este resultado revela que há uma relação de monotonicidade entre as medidas de NBR.

Os resultados para esse caso estão exibidos na Fig. 4.3, onde temos $N^{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\rho^{\frac{1}{2}\mu})$ em função de μ e da intensidade \mathcal{E} na Fig. 4.3(a) e um gráfico (Fig. 4.3(b)) que mostra uma comparação entre os quantificadores $N^{\mathcal{E}\mathcal{E}}$, $N_B^{\mathcal{E}}$ e N_{br} para o estado $\rho^{\frac{1}{2}\mu}$.

Além de ilustrar o conteúdo do Resultado 3, a figura 4.3 revela uma característica interessante das medidas estudadas neste trabalho, a saber, o fato de que essas medidas são funções monotônicas uma da outra. Além disso, são todas funções monótonas do

parâmetro μ . Portanto, poder-se-ia argumentar que isso é uma indicação de que os quantificadores fracos são variações funcionais que realmente capturam a mesma informação a respeito da não-localidade do estado. No entanto, esta posição não pode ser mantida no limite em que $\mathcal{E} \rightarrow 0$, onde $N^{\mathcal{E}\mathcal{E}} = N_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = 0$, enquanto que $N_{\text{br}} > 0$. Neste caso, a diferença conceitual aparece notavelmente. Defendemos então, apoiados pela identidade (4.9), que enquanto $N_{\text{br}}(\rho)$ fornece a NBR total codificada em ρ , $N^{\mathcal{E}\mathcal{E}'}(\rho)$ deve ser interpretada como a quantidade de NBR que é destruída por meio de medições fracas locais. Esses resultados foram recentemente submetidos para publicação na revista *Quantum Information Processing* e podem ser encontrado no endereço <https://arxiv.org/abs/1805.01859>.

5 GENERALIZAÇÃO PARA OUTRAS ENTROPIAS

Como discutido anteriormente na seção 2.7, há na literatura algumas propostas que visam a quantificação da não-localidade associada a um estado quântico. Por exemplo, Costa *et al* [26] propuseram um quantificador de não-localidade de Bell para um sistema de dois qubits baseado na máxima violação da desigualdade CHSH. Propostas para a quantificação de outros tipos de recursos quânticos são também encontradas, sendo algumas bem definidas, como é o caso da entropia de emaranhamento para estados puros bipartidos [75]. Encontramos também proposições para quantificação do direcionamento-EPR em que o grau de direcionabilidade de um estado é medido considerando-se a quantidade pela qual uma desigualdade de direcionamento é maximamente violada [81].

Ainda, como pode ser visto na literatura, existem algumas concepções acerca de medidas de correlações quânticas que são obtidas através de processos de minimização ou maximização, como é o caso da não-localidade de Bell [26], do direcionamento-EPR [81], da discórdia [86, 89, 90] e da própria NBR. Da mesma forma, observa-se que outra ferramenta matemática empregada na computação dessas medidas é a entropia de von Neumann, que conta com um quadro bem estabelecido de propriedades matemáticas que fazem dela uma boa ferramenta no campo da informação quântica em analogia com a entropia de Shannon para a teoria da informação clássica.

Apesar de ser uma função entrópica amplamente usada, sua computação nem sempre é viável, já que demanda um cálculo de autovalores que nem sempre é possível realizar analiticamente. Devido a essa dificuldade analítica, torna-se interessante a utilização de funções entrópicas mais simples. Um exemplo é a entropia linear, cuja computação depende apenas do $\text{Tr}\rho^2$. Embora essa função entrópica seja útil em vários contextos, ela não satisfaz propriedades fundamentais para uma medida de entropia como, por exemplo, a aditividade, condição necessária para uma função que quantifica a informação [115] como é o caso da entropia de von Neumann.

A ideia desse capítulo vai na direção de propor uma generalização do quantificador de NBR (N_{br}). Isso será feito em termos de uma função entrópica que permite sua com-

putação para outras entropias conhecidas apenas ajustando parâmetros de controle, a entropia generalizada quântica [59], a qual será discutida adiante. A motivação para esta tarefa é determinar fórmulas matemáticas mais simples para a computação da NBR e que permitam a abordagem de estados quânticos mais complexos, como o estado geral de dois qubits, Eq. (2.84).

No entanto, antes de implementarmos tal função entrópica na estrutura matemática do quantificador de NBR, faremos uma tentativa empregando diretamente a entropia linear como alternativa ao uso da entropia de von Neumann. Com essa permutação, reescrevemos a medida de irreabilidade como

$$\mathfrak{S}_L(A|\rho) = S_L(\Phi_A(\rho)) - S_L(\rho), \quad (5.1)$$

onde podemos notar que não houve mudança na estrutura matemática da medida de irreabilidade. Logo, sendo a entropia linear dada por $S_L = 1 - \text{Tr}(\rho^2)$, a não-localidade para o contexto (A, B, ρ) torna-se

$$\begin{aligned} \eta_{AB}^L(\rho) &= \mathfrak{S}_L(A|\rho) - \mathfrak{S}_L(A|\Phi_B(\rho)) \\ &= \text{Tr}\rho^2 + \text{Tr}[\Phi_{AB}(\rho)]^2 - \text{Tr}[\Phi_A(\rho)]^2 - \text{Tr}[\Phi_B(\rho)]^2, \end{aligned} \quad (5.2)$$

uma medida em termos apenas de $\text{Tr}\rho^2$ e igualmente para os estados de realidade gerados pelas medidas dos observáveis A e B , respectivamente. Para testar a proposta acima, realizamos um estudo de caso com o estado de Werner ρ_μ . Após cálculos analíticos, obtemos

$$\eta_{AB}^L(\rho_\mu) = \frac{1}{16}[(1 + 3\mu)^2 - (1 - \mu)^2] + \frac{1}{8}[(1 - \mu r)^2 + (1 + \mu r)^2] - \frac{1}{4}(1 + \mu)^2, \quad (5.3)$$

sendo $r = \sqrt{(\cos\theta_a \cos\theta_b + \cos(\phi_a - \phi_b) \sin\theta_a \sin\theta_b)^2}$ a mesma função angular obtida nos casos anteriores, onde $\theta_{a(b)}$ e $\phi_{a(b)}$ são os ângulos que definem as direções de medição dos observáveis A e B . A expressão trigonométrica no argumento da raiz corresponde ao quadrado do produto interno dos vetores unitários \hat{a} e \hat{b} , isto é, $r = \sqrt{(\hat{a} \cdot \hat{b})^2}$, evidenciando que $r \in [0, 1]$.

Como anteriormente, procedemos com a análise da equação acima por meio do estudo

da derivada para analisarmos a monotonicidade em relação ao parâmetro r . A equação acima possui derivada igual a

$$\frac{d}{dr}\eta_{AB}^L(\rho_\mu) = \frac{\mu^2 r}{2} \geq 0, \quad (5.4)$$

a qual é sempre não-negativa para todo $\{r, \mu\} \in [0, 1]$, o que indica um crescimento monótono em relação a r . Aqui, consideraremos também a minimização da NBR de contexto com o objetivo de avaliarmos a quota inferior atingida por ela. No capítulo 2 mostramos que essa quota inferior é computada por meio do processo de minimização sobre todos os observáveis do contexto (A, B, ρ) , Eq. (2.68). Já a NBR obtida via $\max_{\{A, B\}} \eta_{AB}(\rho_\mu)$, é calculada conforme sua definição, Eq. (3.4). Dessa forma, a quota inferior e a NBR são

$$N_{\min}^L(\rho_\mu) = \frac{1}{16} \left[(1 + 3\mu)^2 - (1 - \mu)^2 \right] - \frac{1}{4}(1 + \mu)^2 + \frac{1}{4} \quad (5.5)$$

e

$$N_{\text{br}}^L(\rho_\mu) = \frac{1}{16} \left[(1 + 3\mu)^2 + (1 - \mu)^2 \right] - \frac{1}{8}(1 + \mu)^2. \quad (5.6)$$

Ao analisarmos as equações acima, verificamos que o resultado fornecido pela Eq. (5.5) não quantifica corretamente a quota inferior associada ao estado ρ_μ , quando comparado ao resultado calculado via entropia de von Neumann obtido por Bilobran e Angelo [54], reproduzido aqui numericamente. A Fig. 5.1 expõe os resultados para a quota inferior N_{\min}^L e para a NBR obtida a partir do quantificador $N_{\text{br}}^L(\rho_\mu)$, calculados via entropia linear comparados aos resultados obtidos com a entropia de von Neumann.

De acordo com a Fig. 5.1, o resultado da referência [54] mostra que em $\mu = 1$, a quota inferior é nula quando obtida via entropia de von Neumann, indicando que para estados puros há pelo menos um par de observáveis capaz de acusar ausência de não-localidade, conforme está mostrado no capítulo 2. Porém, no caso de estados puros, o uso da entropia linear em nossos cálculos forneceu $N_{\min}^L \neq 0$, em total desacordo com o resultado de Bilobran e Angelo. No caso do quantificador N_{br} , o uso da entropia linear mostra-se de acordo com o esperado, pois fornece crescimento monótono com μ . Ou seja, em princípio, em comparação com o resultado computado via von Neumann, o resultado obtido via entropia linear seria correto. Voltando ao caso de N_{\min}^L , acreditamos que uma possível

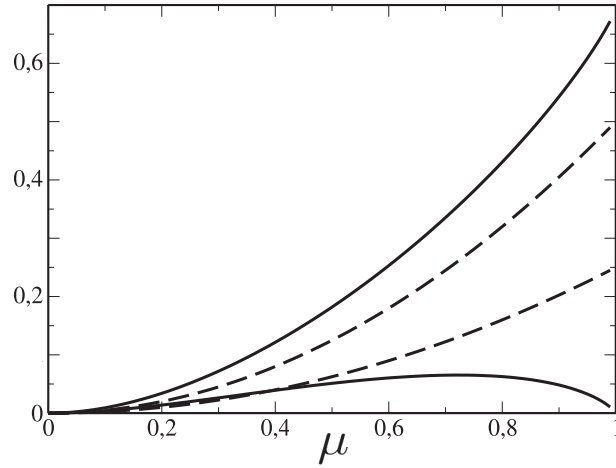


Figura 5.1: A linha contínua superior representa a NBR para o estado de Werner calculada via $N_{\text{br}}(\rho_\mu)$, obtida nos capítulos anteriores. A linha contínua inferior representa o resultado da quota inferior N_{min} visto na referência [54], obtido via entropia de von Neumann. Aqui esse resultado foi reproduzido numericamente. Por outro lado, as duas linhas tracejadas ilustram as Eqs. (5.5) e (5.6). A superior é a NBR obtida via entropia linear e a inferior é a quota inferior também calculada via entropia linear.

explicação para a falha verificada no resultado seja a não-aditividade da entropia linear.

Como segunda alternativa, introduziremos agora nos cálculos a entropia generalizada quântica vista na seção 2.3.5. Relembrando, essa entropia é dada por

$$S_{(q,s)}(\rho) = \frac{(\text{Tr} \rho^q)^s - 1}{s(1 - q)},$$

sendo $q > 0$, $q \neq 1$ e $s \neq 0$. Agora chamamos a atenção para um ponto importante: foi proposta por Bosyk *et al* [64] uma medida de correlação quântica dada pela mínima mudança na entropia induzida por medidas projetivas, dividida por um fator de correção que depende do traço generalizado apenas nos casos de entropias não-aditivas. Aqui, fizemos uso dessa proposta inserindo o fator de normalização na estrutura da medida de irreabilidade, a qual não é alterada de forma conceitual. Dessa forma, reescrevemos a medida de irreabilidade como

$$\mathfrak{S}_{(q,s)}(A, B|\rho) \equiv \frac{S_{(q,s)}(\Phi_A(\rho)) - S_{(q,s)}(\rho)}{(\text{Tr} \rho^q)^s}, \quad (5.7)$$

a qual é não-negativa, uma vez que medidas projetivas aumentam a entropia [31], e anula-se somente nos casos em que a medida não altera o estado do sistema, isto é, situações em

que $\Phi_A(\rho) = \rho$. Outra característica que devemos notar, refere-se ao fator de correção, o qual não possui papel significativo em situações que envolvem entropias aditivas como as entropias de Rényi e de von Neumann, pois $s = 0 \rightarrow (\text{Tr}\rho^q)^s = 1$ e $s = q = 1 \rightarrow (\text{Tr}\rho) = 1$.

Implementando a alteração proposta pela Eq. (5.7), obtemos uma generalização para a quota inferior e a NBR, isto é

$$N_{\min}^{(q,s)}(\rho) = \min_{A,B} \left[\mathfrak{S}_{(q,s)}(A|\rho) - \mathfrak{S}_{(q,s)}(A|\Phi_B(\rho)) \right] = \min_{A,B} \eta_{AB}^{(q,s)}(\rho) \quad (5.8)$$

e

$$N_{\text{br}}^{(q,s)}(\rho) = \max_{A,B} \left[\mathfrak{S}_{(q,s)}(A|\rho) - \mathfrak{S}_{(q,s)}(A|\Phi_B(\rho)) \right] = \max_{A,B} \eta_{AB}^{(q,s)}(\rho). \quad (5.9)$$

Dessa forma, com base nas Eqs. (5.7-5.9), a não-localidade para o contexto (A, B, ρ) é dada por

$$\begin{aligned} \eta_{AB}^{(q,s)}(\rho) &= \mathfrak{S}_{(q,s)}(A|\rho) - \mathfrak{S}_{(q,s)}(A|\Phi_B(\rho)) \\ &= \frac{S_{(q,s)}(\Phi_A(\rho)) - S_{(q,s)}(\rho)}{(\text{Tr}\rho^q)^s} - \frac{S_{(q,s)}(\Phi_{AB}(\rho)) - S_{(q,s)}(\Phi_B\rho)}{[\text{Tr}(\Phi_B(\rho))^q]^s} \\ &= \frac{1}{s(1-q)} \left\{ \left[\frac{\text{Tr}(\Phi_A(\rho))^q}{\text{Tr}\rho^q} \right]^s - \left[\frac{\text{Tr}(\Phi_{AB}(\rho))^q}{\text{Tr}(\Phi_B(\rho))^q} \right]^s \right\}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

a partir da qual podemos verificar que $\eta_{AB}^{(q,s)}(\rho_1 \otimes \rho_2) = 0$ e $\eta_{AB}^{(q,s)}(\Phi_{A(B)}(\rho)) = 0$, ou seja, $\eta = 0$ para estados totalmente descorrelacionados, $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$, e para estados de realidade, $\Phi_{A(B)}(\rho)$. Deste ponto de vista, vemos que a não-localidade generalizada se anula para os mesmos estados que anulam a não-localidade de contexto calculada via entropia de von Neumann ($s = q = 1$).

De forma análoga ao caso da entropia linear discutido anteriormente, realizamos um estudo de caso com o estado de Werner e após cálculos analíticos para obter os autovalores de cada estado, reescrevemos a Eq. (5.10) na forma

$$\eta_{AB}^{(q,s)}(\rho_\mu) = \frac{1}{s(1-q)} \left\{ \frac{2^s[(1-\mu)^q + (1+\mu)^q]^s}{[3(1-\mu)^q + (1+3\mu)^q]^s} - \frac{[(1-\mu r)^q + (1+\mu r)^q]^s}{[(1-\mu)^q + (1+\mu)^q]^s} \right\}, \quad (5.11)$$

sendo novamente $r = \sqrt{(\cos\theta_a \cos\theta_b + \cos(\phi_a - \phi_b) \sin\theta_a \sin\theta_b)^2}$. Assim, foi possível obtermos uma medida generalizada da não-localidade de contexto em termos somente do

parâmetro μ e da função angular r .

Em seguida, procedemos com a obtenção dos extremos da quantidade $\eta_{AB}^{(q,s)}(\rho_\mu)$. Como no caso anterior, optamos por avaliar o sinal da derivada da função não-localidade com a finalidade de verificar se existe crescimento monótono em relação ao parâmetro r . Portanto, avaliamos o sinal de

$$\frac{d}{dr}\eta_{AB}^{(q,s)}(\rho_\mu) = \frac{\mu q [(1 + \mu r)^{q-1} - (1 - \mu r)^{q-1}] [(1 - \mu r)^q + (1 + \mu r)^q]^{s-1}}{(q-1) [(1 - \mu)^q + (1 + \mu)^q]^s}. \quad (5.12)$$

Para analisar o sinal da equação acima, basta notar que $\mu r \geq 0$, pois $\mu, r \in [0, 1]$. Além disso, $(1 \pm \mu)$ e $(1 \pm \mu r)$ são ambos não-negativos. Consequentemente, as somas entre colchetes que aparecem no numerador e no denominador são também não-negativas. Assim, fica evidente que o sinal da derivada é determinado pela diferença entre termos presentes no numerador e pelo termo $(q-1)$ no denominador. Logo, uma averiguação da diferença presente no numerador mostra que $[(1 + \mu r)^{q-1} - (1 - \mu r)^{q-1}] \geq 0 \forall q > 1$ e que $[(1 + \mu r)^{q-1} - (1 - \mu r)^{q-1}] \leq 0 \forall q < 1$. Portanto, $d\eta_{AB}^{(q,s)}(\rho_\mu)/dr \geq 0$ para $q > 0$, $q \neq 1$ e $s \neq 0$, e para $r \in [0, 1]$. Uma análise no limite em que $q \rightarrow 1$ também foi efetuada resultando em $[\ln(1 + \mu r) - \ln(1 - \mu r)] \geq 0$, o que mostra que a derivada permanece positiva nesse limite.

A análise acima mostra que $\eta_{AB}^{(q,s)}(\rho_\mu)$ cresce monotonicamente com r , sendo mínima em $r = 0$ e máxima em $r = 1$. Portanto, tendo em vista esse crescimento monótono, obtemos as expressões generalizadas da quota inferior e da NBR de acordo com as Eqs. (5.8) e (5.9), ou seja,

$$N_{\min}^{(q,s)}(\rho_\mu) = \frac{2^s}{s(1-q)} \left\{ \frac{[(1 - \mu)^q + (1 + \mu)^q]^s}{[3(1 - \mu)^q + (1 + 3\mu)^q]^s} - \frac{1}{[(1 - \mu)^q + (1 + \mu)^q]^s} \right\} \quad (5.13)$$

e

$$N_{\text{br}}^{(q,s)}(\rho_\mu) = \frac{1}{s(1-q)} \left\{ \frac{2^s [(1 - \mu)^q + (1 + \mu)^q]^s}{[3(1 - \mu)^q + (1 + 3\mu)^q]^s} - 1 \right\}. \quad (5.14)$$

Note que os índices entrópicos q e s generalizam essas medidas para outras funções entrópicas conhecidas. Por exemplo, tomando $s = 1$ fomos capazes de quantificar as não-localidades que seriam obtidas através das entropias linear e de von Neumann, pois tomando a seguir $q \rightarrow 1$ (entropia de von Neumann), conseguimos encontrar equações

analíticas que reproduzem os resultados para a quota inferior e a NBR mostrados na Fig. 5.1 para o estado de Werner. Estas equações são dadas por

$$N_{\min}^{(1,1)}(\rho_\mu) = \frac{1}{4} [(1 + 3\mu) \ln(1 + 3\mu) - (1 - \mu) \ln(1 - \mu) - 4(1 + \mu) \ln(1 + \mu)] \quad (5.15)$$

e

$$N_{\text{br}}^{(1,1)}(\rho_\mu) = \frac{1}{4} [(1 - \mu) \ln(1 - \mu) - 2(1 + \mu) \ln(1 + \mu) - (1 + 3\mu) \ln(1 + 3\mu)]. \quad (5.16)$$

Já no caso da entropia linear, as equações podem ser determinadas para $q = 2$, o que fornece

$$N_{\min}^{(2,1)}(\rho_\mu) = \frac{\mu^2 - \mu^4}{1 + 4\mu^2 + 3\mu^4} \quad (5.17)$$

e

$$N_{\text{br}}^{(2,1)}(\rho_\mu) = \frac{2\mu^2}{1 + 3\mu^2}. \quad (5.18)$$

Esses resultados podem ser melhor avaliados através da Fig. 5.2, onde apresentamos na Fig. 5.2 (a) a situação para $s = 1$. As curvas contínuas representam a quota inferior e a NBR calculadas fazendo $q \rightarrow 1$, o que nos leva ao caso da entropia de von Neumann. Estes resultados foram obtidos através das Eq. (5.15) e (5.16), mostrando que ambas reproduzem corretamente o resultado analítico para a NBR e o resultado numérico para a quota inferior mostrado anteriormente e calculado analiticamente em [54]. Já as curvas tracejadas, $q = 2$ (entropia linear), mostram o comportamento de $N_{\min}^{(2,1)}(\rho_\mu)$ e $N_{\text{br}}^{(2,1)}(\rho_\mu)$. Estes resultados foram calculados através das Eq. (5.17) e (5.18) respectivamente. É possível ver da Eq. (5.17) e da Fig. 5.2 (a) que para $\mu = 1$ a não-localidade vai para zero, mostrando que nossos resultados concordam com os resultados reportados na referência [54], o qual afirma que para estados puros, $N_{\min}(\rho_\mu) = 0$. Isso foi possível graças ao fator de correção, $(\text{Tr} \rho^q)^s$, que ao ser introduzido nos cálculos possibilitou a obtenção de equações analíticas capazes de quantificar corretamente $N_{\min}^{(q,s)}$ e $N_{\text{br}}^{(q,s)}$, mesmo com o uso de entropias não-aditivas.

Outra informação importante que podemos atribuir aos gráficos obtidos para $s = 1$ na Fig. 5.2, refere-se aos pontos de máximo em cada situação. No lado esquerdo, note que $N_{\min}^{(1,1)}(\rho_\mu)$ e $N_{\text{br}}^{(2,1)}(\rho_\mu)$ atingem seus máximos para valores distintos de μ , ao passo

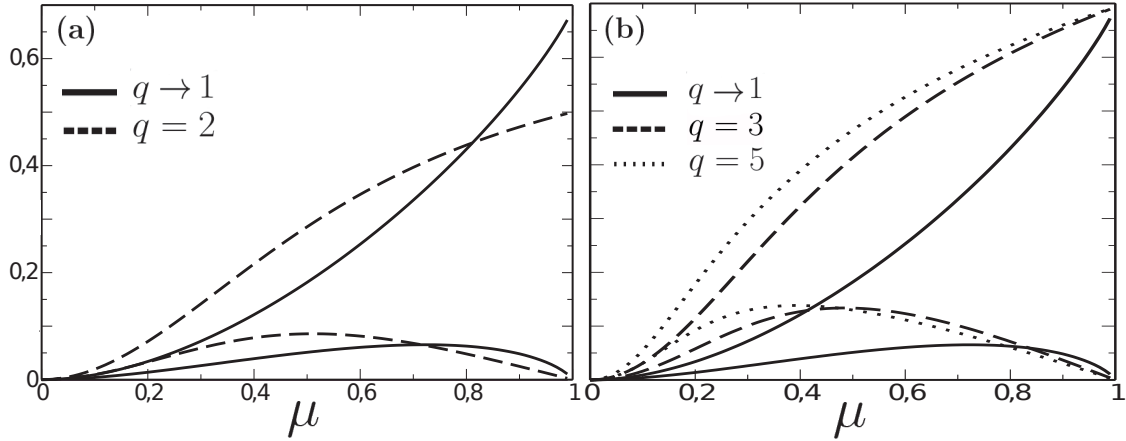


Figura 5.2: Ilustração obtida para $s = 1$. Em (a), temos $N_{\min}^{(1,1)}(\rho_\mu)$ e $N_{\text{br}}^{(1,1)}(\rho_\mu)$ obtidas via entropia de von Neumann (linhas contínuas) e $N_{\min}^{(2,1)}(\rho_\mu)$ e $N_{\text{br}}^{(1,1)}(\rho_\mu)$ obtidas via entropia linear (linhas tracejadas). Na direita, temos $N_{\min}^{(q,0)}(\rho_\mu)$ e $N_{\text{br}}^{(q,0)}(\rho_\mu)$ para uma família de entropias de Rényi. Em cada quadro, as curvas superiores representam a NBR computada via o quantificador $N_{\text{br}}^{(q,s)}$, enquanto as curvas inferiores representam a quota inferior calculada via $N_{\min}^{(q,s)}$.

que $N_{\text{br}}^{(1,1)}(\rho_\mu)$ e $N_{\text{br}}^{(2,1)}(\rho_\mu)$ alcançam seus valores máximos sempre em $\mu = 1$. O mesmo comportamento pode ser observado no lado direito da Fig. 5.2, onde mostramos a quota inferior e a NBR para uma família de entropias de Rényi. Essa informação sugere que há um crescimento monótono da NBR em relação ao parâmetro de fidelidade μ para quaisquer valores de q e s . Ainda, ela sugere que $N_{\text{br}}^{(1,1)}(\rho_\mu)$ e $N_{\text{br}}^{(2,1)}(\rho_\mu)$ são funções monótonas uma da outra já que são maximizadas para o mesmo valor de μ .

Isso pode ser verificado observando-se a Fig. 5.3, onde mostramos $N_{\min}^{(2,1)}(\rho_\mu)$ e $N_{\text{br}}^{(2,1)}(\rho_\mu)$ obtidas via entropia linear como funções de $N_{\min}^{(1,1)}(\rho_\mu)$ e $N_{\text{br}}^{(1,1)}(\rho_\mu)$, calculadas através da entropia de von Neumann. Observe que, de fato, temos uma relação monótona para a NBR calculada por meio dos quantificadores generalizados pelos parâmetros entrópicos, indicando que as medidas são equivalentes, ou seja, carregam a mesma informação sobre a não-localidade associada ao estado de Werner, pois revelam o mesmo comportamento sobre essa quantidade. Já em relação a $N_{\min}^{(1,1)}(\rho_\mu)$ e $N_{\min}^{(2,1)}(\rho_\mu)$, é evidente das Figs. 5.2 e 5.3 que não existe relação monótona, pois as funções atingem valores máximos para diferentes valores de μ , ou seja, para estados diferentes.

Nossos resultados evidenciam ainda que ao fazermos um comparativo entre as medidas

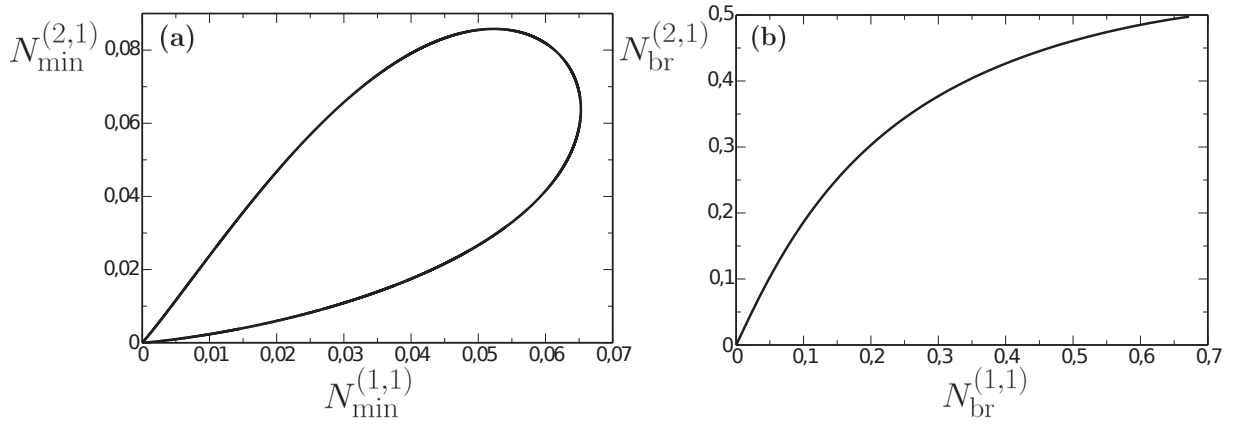


Figura 5.3: Em (a) é mostrado o gráfico de $N_{\min}^{(2,1)}$ em função de $N_{\min}^{(1,1)}$. Em (b) vemos a relação monótona entre $N_{\text{br}}^{(2,1)}$ e $N_{\text{br}}^{(1,1)}$.

da quota inferior e da NBR, o quantificador $N_{\text{br}}^{(q,s)}$ se mostra como uma medida mais adequada do conteúdo de não-localidade, pois além de quantificar toda a não-localidade associada ao estado, $N_{\text{br}}^{(q,s)}$ fornece sempre a mesma informação, independentemente dos valores de q e s . Ademais, ao contrário de $N_{\min}^{(q,s)}$, o quantificador $N_{\text{br}}^{(q,s)} \neq 0$ para $\mu = 1$. Ainda, ele é máximo quando $\mu = 1$ sendo, portanto, capaz de capturar toda a quantidade de não-localidade associada a estados puros.

Na Fig. 5.4, apresentamos uma análise estatística para a quota inferior e a NBR. Os gráficos exibem comparações de $N_{\text{br}}^{(q,s)}$ e $N_{\min}^{(q,s)}$ em relação à não-localidade de contexto $\eta_{AB}^{(q,s)}(\rho_\mu)$. Nos dois casos, cada ponto da distribuição representa uma medida da NBR (Fig. 5.4 (a)) e da quota inferior (Fig. 5.4(b)), calculada para valores aleatórios de $\mu, r \in [0, 1]$, $q \in [1, 5]$ e $s \in [-3, 0]$. As distribuições contém, cada uma, o equivalente a cem mil pontos. Na Fig. 5.4 (a), apresentamos a distribuição estatística para a NBR generalizada. Essa distribuição evidencia que para o estado Werner, nosso quantificador sempre fornece o máximo de não-localidade contida no estado (mancha acima da reta), sendo sempre positivo para quaisquer valores de q e s . Já na Fig. 5.4(b), exibimos a distribuição para $N_{\min}^{(q,s)}$ (mancha abaixo da reta). Observe que essa distribuição nos mostra que em relação à não-localidade de contexto $\eta_{AB}^{(q,s)}(\rho_\mu)$, $N_{\min}^{(q,s)}$ sempre fornece a quota mínima de não-localidade associada ao estado.

Foi verificado que, diferentemente de $N_{\text{br}}^{(q,s)}$, a não-localidade de contexto e a quota inferior generalizadas podem assumir valores negativos. Nesse caso, vimos que isso ocorre

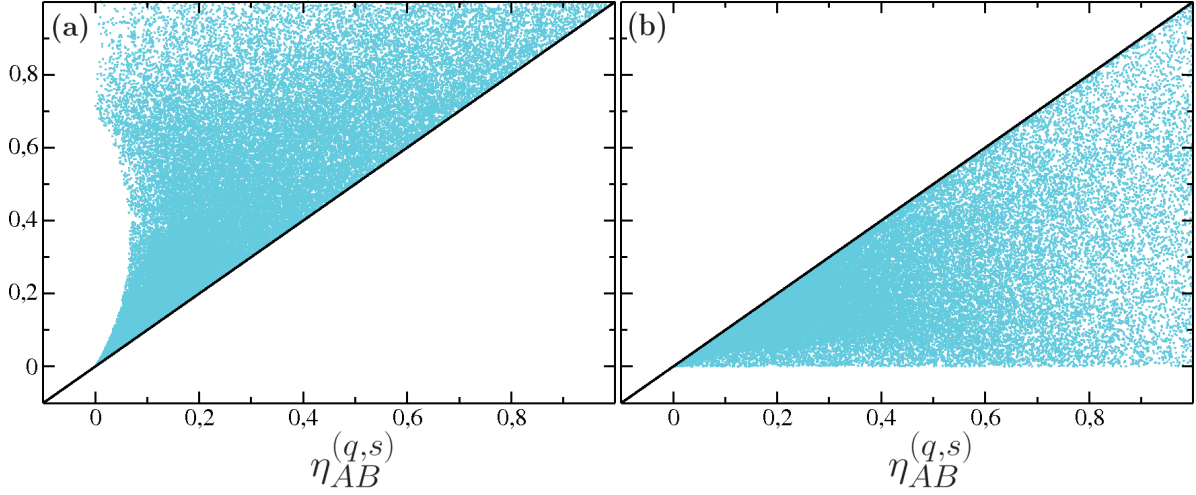


Figura 5.4: No cenário das generalizações, apresentamos aqui uma análise estatística feita com o estado de Werner (ρ_μ) para a quota inferior e a NBR obtida via $N_{\text{br}}^{(q,s)}$ em relação à não-localidade de contexto $\eta_{AB}^{(q,s)}(\rho_\mu)$. Na Fig. 5.4(a), mostramos o caso da NBR generalizada computada via $N_{\text{br}}^{(q,s)}$. Como esperado, em relação a $\eta_{AB}^{(q,s)}(\rho_\mu)$, nosso quantificador sempre fornece o valor máximo da não-localidade associada a ρ_μ . Já na Fig. 5.4(b), $N_{\text{min}}^{(q,s)}$ fornece o valor mínimo da não-localidade associada ao estado quando comparada à não-localidade de contexto. Cada distribuição contém cerca de 10^5 pontos e foram obtidas para valores de $\mu, r \in [0, 1]$, $q \in [1, 5]$ e $s \in [-3, 0]$

para valores do parâmetro entrópico $q \in [0, 1]$, tanto no cenário em que utilizamos a entropia de Tsallis ($s = 1$), quanto no caso em que usamos a entropia de Rényi ($s \rightarrow 0$).

Embora a entropia generalizada quântica satisfaça algumas propriedades como invariância unitária e não-negatividade, ela falha em satisfazer a condição de aditividade [64]. Dessa forma, mesmo sendo apenas uma suspeita por enquanto, achamos que talvez seja esse o motivo da ocorrência dos valores negativos de não-localidade para $q \in [0, 1]$. É importante ressaltar que mesmo sendo contraintuitivos, estes valores ainda apontam para alterações de realidade em virtude de medições remotas e necessitam de uma inspeção mais aprofundada sobre seus significados. De toda forma, independentemente de $\eta_{AB}^{(q,s)}(\rho_\mu)$ e $N_{\text{min}}^{(q,s)}$, a Fig. 5.4 assegura que nossos resultados estão consistentes, pois nela é mostrado claramente que nosso quantificador, $N_{\text{br}}^{(q,s)}$, é sempre positivo para quaisquer q e s sendo capaz de capturar o máximo conteúdo não-local associado apenas ao estado ρ_μ , seja para estados puros ou mistos. Em particular, tais resultados nos credenciam a usar a fórmula simplificada $N_{\text{br}}^{2,1}$ para a computação da NBR.

6 CONCLUSÕES

O advento da MQ no século passado deu origem a uma busca intensa por um profundo conhecimento sobre os mecanismos de funcionamento da natureza em níveis microscópicos. Grandes nomes como Einstein, Bohr, Dirac, entre outros, deixaram um legado enorme de conhecimento para as gerações futuras quando construíram a teoria quântica. Esse legado foi o alicerce para muitas novas descobertas que impulsionaram a sociedade a uma nova era tecnológica. Transistores, materiais semicondutores, lasers, computadores e muitas outras conquistas foram possíveis com aplicações da MQ. Dentro desse cenário de novas possibilidades, a existência de aspectos não-locais que são verificados apenas no mundo quântico, abre as portas para um leque de possíveis aplicações baseadas na utilização desses fenômenos como potenciais recursos para tarefas de processamento e transmissão da informação nas modernas ciências da informação e computação quânticas.

Para que isso possa ser efetivamente possível, é essencialmente importante a compreensão sobre como esses fenômenos emergem no cenário quântico. Nessa direção, o teorema de Bell impactou profundamente o entendimento sobre a natureza ao revelar o caráter não-local da MQ através de violações das desigualdades de Bell. Isso abriu caminho para o surgimento de vários trabalhos publicados na literatura que abordam diferentes formas de analisar e quantificar a não-localidade quântica. Algumas abordagens partem das violações de desigualdades tipo Bell, ancoradas na hipótese de localidade causal, buscando o limite máximo pelo qual uma desigualdade pode ser violada e também como é possível quantificar a não-localidade de estados quânticos através dessas violações. Outros estudos tratam de situações em que um estado maximamente emaranhado não viola maximamente uma desigualdade de Bell, fenômeno conhecido como anomalia de não-localidade. Além disso, existem trabalhos que abordam a não-localidade como um recurso em tarefas de processamento da informação quântica e outros que abordam a quantificação da não-localidade sem considerar desigualdades tipo Bell, conforme foi comentado no começo do capítulo 3.

No cenário de quantificação da não-localidade, apresentamos uma forma de quantificar

a não-localidade associada a um estado quântico em um caminho alternativo àqueles que fazem uso das desigualdades de Bell. Mostramos através da referência [54] que alterações na realidade de observáveis podem acusar a presença de aspectos não-locais para um determinado contexto, uma vez que essas alterações ocorrem devido a medições locais feitas remotamente. Aqui, denominamos tal caráter não-local como não-localidade baseada em realismo (NBR) e mostramos como construir um objeto capaz de quantificar a NBR associada apenas ao estado quântico considerado.

Vimos que quando comparado a quantificadores baseados em violações da desigualdade CHSH, nosso quantificador foi capaz de capturar aspectos não-locais não acessíveis às desigualdades de Bell. Além disso, mostramos também que nossa abordagem é livre de anomalias de não-localidade, uma vez que nossa medida se reduz à entropia de emaranhamento para estados puros bipartidos de dimensão arbitrária. Mostramos ainda que é possível posicionar a NBR dentro de uma hierarquia de medidas de quanticidade e que, embora não exista um conjunto definido de condições que devem ser satisfeitas por quantificadores de não-localidade, nosso quantificador satisfaz condições como invariância unitária e monotonicidade sob operações locais, sendo esta última um consenso na literatura para todas as medidas que visam quantificar aspectos não-locais.

Em seguida, no capítulo 4, fizemos uma extensão do conceito de NBR ao regime das medições fracas. Isso foi realizado empregando-se um procedimento capaz de alternar entre a descrição de cenários que envolvem tanto medições fracas, quanto medições projetivas. Tal procedimento denominado de monitoramento, permitiu obtermos uma medida de NBR capaz de interpolar entre os regimes de medições fracas e projetivas, além de levar ao cenário de nenhuma medição. Primeiro foi considerado o caso onde ocorrem medições fracas apenas em uma das partições do espaço, situação onde definimos a não-localidade fraca baseada em realismo unidirecional (NFBR unidirecional). Logo após foi considerado o caso em que medições fracas ocorrem em ambas partições do espaço, cenário em que foi definida a não-localidade fraca simétrica baseada em realismo (NFSBR). As duas medidas mostraram ser não-negativas, equivalem à NBR quando são levadas ao regime de medições fortes ($\mathcal{E} \rightarrow 1$) e obedecem uma hierarquia determinada por uma cadeia de desigualdades. Além dessas características, mais importante é a sua interpretação, a qual

indica que ambas as medidas indicam a quantidade de NBR que é destruída do estado quando medições fracas são realizadas localmente em uma das partições do espaço (NFBR unidirecional) ou em ambas as partições (NFSBR).

Por fim, apresentamos uma generalização da NBR para outras entropias como a linear, de Rényi e de Tsallis. Isso foi possível graças ao uso da entropia generalizada quântica, uma função dos parâmetros entrópicos q e s que permitiu obtermos generalizações para a não-localidade de contexto, a quota inferior e a NBR. Nossa análise mostrou que embora a NBR tenha apresentado o resultado esperado, sendo positiva para quaisquer valores de q e s , as não-localidade de contexto e a quota inferior apresentaram alguns valores negativos para casos envolvendo as entropias de Rényi e de Tsallis quando $q \in [0, 1]$. Esses valores negativos, apesar do contrassenso, ainda acusam alterações de realidade devido a operações locais conduzidas remotamente e devem ser investigados mais profundamente. Mais importantemente, verificamos que nosso quantificador de NBR permanece sempre positivo para quaisquer q e s sendo capaz de capturar o máximo conteúdo não-local associado apenas ao estado e sendo portanto mais adequado à condição de quantificador de não-localidade.

Nesta tese apresentamos o conceito de NBR, vimos que sua emergência ocorre em contextos totalmente diferentes daqueles relacionados à verificação da não-localidade de Bell. Isto é, a verificação da NBR é feita em cenários onde ocorrem alterações de ir-realidade devido a intervenções remotas locais. Além disso, apresentamos também um objeto capaz de quantificar a NBR associada apenas ao estado considerado. Dentro desse contexto, apontamos que uma possível abordagem que podemos tomar como perspectiva para trabalhos futuros envolve sistemas tripartidos. Para esses sistemas podemos avaliar como é possível verificar a emergência dessa noção de não-localidade através de medições remotas realizadas localmente sobre uma das partes constituintes do sistema tripartido. Em adição, esperamos também construir quantificadores para a NBR tripartida através do formalismo adotado, levando em conta que a mesma deve manifestar-se apenas quando consideramos as três partições do sistema de forma conjunta.

Outra possível abordagem consiste em verificar se é possível implementar a NBR em um cenário de teoria de recursos, de forma análoga à teoria de recursos para o emaranha-

mento em tarefas de processamento da informação quântica. Teorias de recursos podem ser usadas para quantificar um efeito quântico desejável, desenvolver novos protocolos para sua detecção e identificar processos que otimizam seu uso para uma determinada aplicação. Isso pode ser feito no campo de processamento da informação quântica independente de dispositivo (DIQIP), do inglês “*device independent quantum information processing*”. Em tal cenário, as partes não podem criar não-localidade através de operações locais, em analogia ao quadro de operações locais e comunicação clássica na teoria de emaranhamento [108]. Por fim, proporemos também, dentro do contexto de referenciais quânticos, avaliar o comportamento da NBR frente a mudanças de referencial, em situações onde será considerado o referencial da partícula na computação da NBR.

REFERÊNCIAS

- [1] M. Planck. *Scientific autobiography and other essays*. London: Williams e Norgate, 1950.
- [2] Robert Eisberg e Robert Resnick. *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei and Particles*. New York: John Wiley e Sons, 1985.
- [3] Nelson Studart. “A invenção do conceito de quantum de energia segundo Planck”. Em: *Rev. Bras. Ens. Fis.* 22 (2000), p. 523.
- [4] Max Jammer. *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*. United States of America: McGraw-Hill Book Company, 1966.
- [5] Olival Freire Jr. Indianara Silva. “A descoberta do efeito Compton: De uma abordagem semiclássica a uma abordagem quântica”. Em: *Rev. Bras. Ens. Fis.* 36 (2014), pp. 1601–1.
- [6] Asher Peres. *Quantum Theory Concepts and Methods*. New York: Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [7] Anderson Leite e Samuel Simon. “Werner Heisenberg e a Interpretação de Copenhagen: a filosofia platônica e a consolidação da teoria quântica”. Em: *Sci. Stud.* 8 (2010), p. 213.
- [8] Franck Laloe. *Do We Really Understand Quantum Mechanics?* New York: Cambridge University Press, 2012.
- [9] Dipankar Home. *Conceptual Foundations of Quantum Physics: An Overview from Modern Perspectives*. New York: Springer Science+Business Media, 1997.
- [10] David J. Griffiths. *Mecânica Quântica*. São Paulo: Pearson, 2011.
- [11] A. Einstein et al. “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?” Em: *Phys. Rev.* 47 (1935), pp. 777–780.

- [12] N. Bohr. “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?” Em: *Phys. Rev.* 48 (1935), pp. 696–702.
- [13] Nouredine Zettili. *Quantum Mechanics Concepts and Applications*. United Kingdom: Wiley, 2009.
- [14] David Bohm. “A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of Hidden Variables. I”. Em: *Phys. Rev.* 85.2 (1952), pp. 166–179.
- [15] David Bohm. “A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of Hidden Variables. II”. Em: *Phys. Rev.* 85.2 (1952), pp. 180–193.
- [16] John S. Bell. “On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox”. Em: *Phys.* 1 (1964), pp. 195–200.
- [17] D. Bohm e Y. Aharonov. “Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky”. Em: *Phys. Rev.* 108 (1957), p. 1070.
- [18] N. Brunner *et al.* “Bell Nonlocality”. Em: *Rev. Mod. Phys.* 86 (2014), pp. 419–477.
- [19] A. Aspect *et al.* “Experimental Test of Bell’s Inequalities Using Time-Varying Analyzers”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 49.25 (1982), p. 1804.
- [20] B. Hensen *et al.* “Experimental loophole-free violation of a Bell inequality using entangled electron spins separated by 1.3 km”. Em: *Nature* 526 (2015), pp. 682–686.
- [21] L. K. Shalm *et al.* “Strong Loophole-Free Test of Local Realism”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 115 (2015), p. 250402.
- [22] M. Giustina *et al.* “Significant Loophole-Free Test of Bell’s Theorem with Entangled Photons”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 115 (2015), p. 250401.
- [23] B. Hensen *et al.* “Loophole-free Bell test using electron spins in diamond: Second experiment and additional analysis”. Em: *Sci. Rep.* 6 (2016), p. 30289.
- [24] W. Rosenfeld *et al.* “Event-Ready Bell Test Using Entangled Atoms Simultaneously Closing Detection and Locality Loopholes”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 119 (2017), p. 010402.

- [25] John F. Clauser et al. “Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 23.15 (1969), p. 880.
- [26] A. C. S. Costa et al. “Generalized discord, entanglement, Einstein-Podolsky-Rosen steering, and Bell nonlocality in two-qubit systems under (non-) Markovian channels: Hierarchy of quantum resources and cronology of deaths and births.” Em: *Phys. A* 461 (2016), pp. 469–479.
- [27] Álvaro Balsas. *Realismo e Localidade em Mecânica Quântica*. Campina Grande: EDUEPB, 2013.
- [28] Aurino Ribeiro Filho. “Realismo e Localidade em Mecânica Quântica”. Em: *Rev. Bras. Ens. Fis.* (2015).
- [29] Joy Christian. “Disproof of Bell’s Theorem by Clifford Algebra Valued Local Variables”. Em: *arXiv:quant-ph/0703179v3* (2010).
- [30] Joy Christian. “Disproofs of Bell, GHZ, and Hardy Type Theorems and the Illusion of Entanglement”. Em: *arXiv:0904.4259v4 [quant-ph]* (2010).
- [31] Michael A. Nielsen e Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. 7^a ed. New York: Cambridge University Press, 2010.
- [32] C. Brukner *et al.* “Bell’s Inequalities and Quantum Communication Complexity”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 92 (2004), pp. 127901–1.
- [33] Antonio Acín *et al.* “Device-Independent Security of Quantum Cryptography against Collective Attacks”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007), p. 230501.
- [34] Lluís Masanes Antonio Acín Nicolas Gisin. “From Bell’s Theorem to Secure Quantum Key Distribution”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 97 (2006), p. 120405.
- [35] Sixia Yu et al. “All Entangled Pure States Violate a Single Bell’s Inequality”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 109 (2012), p. 120402.
- [36] E. Schrödinger. “Discussion of Probability Relations between Separated Systems”. Em: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 31 (1935), pp. 555–563.

- [37] Sandu Popescu. “Bell’s Inequalities and Density Matrices: Revealing Hidden Non-locality”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 74 (1995), pp. 2619–2622.
- [38] N. Gisin. “Bell’s Inequalities inequality holds for all non-product states”. Em: *Phys. Lett. A* 154 (1991), p. 201.
- [39] R. F. Werner. “Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model”. Em: *Phys. Rev. A* 80 (1989), p. 4277.
- [40] A. Acín et al. “Quantum nonlocality in two three-level systems”. Em: *Phys. Rev. A* 65 (2002), p. 052325.
- [41] A. A. Méthot e V. Scarani. “An anomaly of non-locality”. Em: *Quantum Inf. Comput* 7 (2007), p. 157.
- [42] T. Vidick e S. Wehner. “More nonlocality with less entanglement”. Em: *Phys. Rev. A* 83 (2011), p. 052310.
- [43] S. Camalet. “Measure-independent anomaly of nonlocality”. Em: *Phys. Rev. A* 96 (2017), p. 052322.
- [44] Ryszard Horodecki *et al.* “Quantum entanglement”. Em: *Rev. of Mod. Phys.* 81 (2009), p. 865.
- [45] Rodrigo Gallego et al. “Operational Framework for Nonlocality”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 109 (2012), p. 070401.
- [46] D. Kaszlikowski *et al.* “Violations of Local Realism by Two Entangled N -Dimensional Systems Are Stronger than for Two Qubits”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 85 (2000), p. 4418.
- [47] J. Ryu W. Laskowski e M. Zukowsky. “Noise resistance of the violation of local causality for pure three-qutrit entangled states”. Em: *J. Phys. A* 47 (2014), p. 424019.
- [48] T. Maudlin. *Proceedings of the 1992 Meeting of the Philosophy of Science Association, edited by D. Hull, M. Forbes, and K. Okruhlik.* address: Philosophy of Science Association, East Lansing, 1992.

- [49] R. Cleve G. Brassard e A. Tapp. “Cost of Exactly Simulating Quantum Entanglement with Classical Communication”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 83 (1999), p. 1874.
- [50] M. Steiner. “Towards quantifying non-local information transfer: Finite-bit non-locality”. Em: *Phys. Lett. A* 270 (2000), p. 239.
- [51] D. Bacon e B. F. Toner. “Bell Inequalities with Auxiliary Communication”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 90 (2003), p. 157904.
- [52] C. Branciard e N. Gisin. “Quantifying the Nonlocality of Greenberger-Horne-Zeilinger Quantum Correlations by a Bounded Communication Simulation Protocol”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 107 (2011), p. 020401.
- [53] E. A. Fonseca e Fernando Parisio. “Measure of nonlocality which is maximal for maximally entangled qutrits”. Em: *Phys. Rev. A* 92 (2015), 030101(R).
- [54] A. L. O. Bilobran e R. M. Angelo. “A measure of physical reality”. Em: *Europhys. Lett.* 112.9 (2015), pp. 1–6.
- [55] P. R. Dieguez e R. M. Angelo. “Information-reality complementarity: The role of measurements and quantum reference frames”. Em: *Phys. Rev. A* 97 (2018), p. 022107.
- [56] L. Vaidman. “Weak-measurement elements of reality”. Em: *Found. Phys.* 26 (1996), p. 895.
- [57] Luca Mancino *et al.* “Information-reality complementarity in photonic weak measurements”. Em: *Phys. Rev. A* 97 (2018), p. 062108.
- [58] Jonas Maziero. “Entendendo a entropia de von Neumann”. Em: *Rev. Bras. Ens. Fis.* 37.1 (2015), pp. 1314–1314.
- [59] Xinhua Hu e Zhongxing Ye. “Generalized quantum entropy”. Em: *J. Math. Phys.* 47.023502 (2006), pp. 1–7.
- [60] U. Fano. “Description of States in Quantum Mechanics by Density Matrix and Operator Techniques”. Em: *Rev. Mod. Phys.* 29 (1957), p. 74.
- [61] Wojciech H. Zurek *et al.* “Coherent States via Decoherence”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 70.9 (1993), p. 1188.

- [62] A. Rényi. “On measures of information and entropy”. Em: *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability* (1960), 547–561.
- [63] C. Tsallis. “Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics”. Em: *J. Stat. Phys.* 52 (1988), 479–487.
- [64] G.M. Bosyk et al. “Unified entropic measures of quantum correlations induced by local measurements”. Em: *Phys. A* 462 (2016), 930–939.
- [65] J.Maziero et al. “System-reservoir dynamics of quantum and classical correlations”. Em: *Phys. Rev. A* 81 (2010), p. 022116.
- [66] R. F. O’Connell. “Decoherence in Quantum Systems”. Em: *IEEE Trans. Nanotechnol.* 4.1 (2005), pp. 77–82.
- [67] G. W. Ford et al. “Quantum measurement and decoherence”. Em: *Phys. Rev. A* 64 (2010), p. 032101.
- [68] David Bohm. *Quantum Theory*. New York: Prentice Hall, 1951.
- [69] Brunner *et al.* “Bell nonlocality”. Em: *Rev. Mod. Phys.* 2 (2014), pp. 419–478.
- [70] Freedman S. e J. Clauser. “Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 28 (1972), p. 938.
- [71] A. D. Ribeiro e R. M. Angelo. “Entanglement dynamics via coherent-state propagators”. Em: *J. Phys. A* 82 (2010), p. 052335.
- [72] R. Horodecki et al. “Quantum entanglement”. Em: *Rev. Mod. Phys.* 81 (2009), p. 865.
- [73] Charles H. Bennett *et al.* “Mixed State Entanglement and Quantum Error Correction”. Em: *Phys. Rev. A* 54.5 (1996), pp. 3824–3851.
- [74] A. D. Ribeiro e R. M. Angelo. “Entanglement dynamics via semiclassical propagators in systems of two spins”. Em: *J. Phys. A* 85 (2012), p. 052312.
- [75] Dagmar Bru. “Characterizing entanglement”. Em: *J. Math. Phys.* 43.9 (2002), pp. 4237–4251.

- [76] William K. Wootters. “Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 80.10 (1998), pp. 2245–2248.
- [77] Scott Hill e William K. Wootters. “Entanglement of a Pair of Quantum Bits”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 78.26 (1997), pp. 5022–5025.
- [78] Capasso et al. “Sensitive observables of quantum mechanics”. Em: *Int. J. Theor. Phys.* 7 (1973), 319–326.
- [79] E. Schrödinger. “Discussion of probability relations between separated systems”. Em: *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 31.4 (1935), 555–563.
- [80] E. Schrödinger. “Probability relations between separated systems”. Em: *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 32.3 (1935), 446–452.
- [81] A. C. S. Costa e R. M. Angelo. “Quantification of Einstein-Podolski-Rosen steering for two-qubit states”. Em: *Phys. Rev. A* 93.020103 (2016), pp. 1–5.
- [82] H. M. Wiseman et al. “Steering, Entanglement, Nonlocality, and the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox.” Em: *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007), p. 140402.
- [83] S. J. Jones et al. “Entanglement, Einstein-Podolsky-Rosen correlations, Bell non-locality, and steering”. Em: *Phys. Rev. A* 76 (2007), p. 052116.
- [84] Y. Z. Law et al. “Quantum randomness extraction for various levels of characterization of the devices”. Em: *J. Phys. A* 47 (2014), p. 424028.
- [85] C. Branciard et al. “One-sided device-independent quantum key distribution: Security, feasibility, and the connection with steering”. Em: *J. Phys. A* 85 (2012), 010301(R).
- [86] H. Ollivier e W. H. Zurek. “Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 88.1 (2002), p. 017901.
- [87] T. Werlang et al. “Robustness of quantum discord to sudden death”. Em: *Phys. Rev. A* 80.2 (2009), p. 024103.
- [88] Z. Merali. “The power of discord”. Em: *Nature* 474 (2011), pp. 24–26.

- [89] L. Henderson e V. Vedral. “Classical, Quantum and Total Correlations.” Em: **J. Phys. A: Math. Gen.** 34 (2001), 6899–6905.
- [90] C. C. Rulli e M. S. Sarandy. “Global quantum discord in multipartite systems”. Em: **Phys. Rev. A** 84 (2011), p. 042109.
- [91] A. E. Ruark. “Is the quantum-mechanical description of physical reality complete?” Em: **Phys. Rev.** 48 (1935), p. 466.
- [92] C. Brukner e A. Zeilinger. “Operationally Invariant Information in Quantum Measurements”. Em: **Phys. Rev. Lett.** 83 (1999), p. 3354.
- [93] M. Schlosshauer. “Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics”. Em: **Rev. Mod. Phys.** 76 (2005), p. 1267.
- [94] W. H. Zurek. “Quantum darwinism”. Em: **Nat. Phys.** 5 (2009), p. 181.
- [95] S. Glancy G. B. Silva e H. M. Vasconcelos. “Investigating bias in maximum-likelihood quantum-state tomography”. Em: **Phys. Rev. A** 95 (2017), p. 022107.
- [96] Shunlong Luo. “Quantum discord for two-qubit systems”. Em: **Phys. Rev. A** 77 (2008), p. 042303.
- [97] R. Horodecki et al. “Violating Bell inequality by mixed spin-1/2 states: necessary and sufficient condition”. Em: **Phys. Lett. A** 200 (1995), pp. 340–344.
- [98] D. Kaszlikowski et al. “Violations of Local Realism by Two Entangled N-Dimensional Systems Are Stronger than for Two Qubits”. Em: **Phys. Rev. Lett.** 85 (2000), p. 4418.
- [99] W. Laskowski et al. “Noise resistance of the violation of local causality for pure three-qutrit entangled states”. Em: **J. Phys. A** 47 (2014), p. 424019.
- [100] S. G. A. Brito et al. “Quantifying Bell nonlocality with the trace distance”. Em: **J. Phys. A** 97 (2018), p. 022111.
- [101] Daniel Collins *et al.* “Bell Inequalities for Arbitrarily High-Dimensional Systems”. Em: **Phys. Rev. Lett.** 88.4 (2002), p. 4277.
- [102] F. Parisio. “Analytic quantification of the singlet nonlocality for the first Bell inequality”. Em: **Phys. Rev. A** 93 (2016), p. 032103.

- [103] V. Vedral e M. B. Plenio. “Entanglement measures and purification procedures”. Em: *Phys. Rev. A* 57.3 (1998), pp. 1619–1633.
- [104] Guifré Vidal. “Entanglement monotones”. Em: *J. Mod. Opt.* 2 (2000).
- [105] Sandu Popescu e Daniel Rohrlich. “Thermodynamics and the measure of entanglement”. Em: *Phys. Rev. A* 56.5 (1997), R3319.
- [106] V. Vedral et al. “Quantifying Entanglement”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 78.12 (1997), pp. 2275–2279.
- [107] Guifré Vidal e Rolf Tarrach. “Robustness of entanglement”. Em: *Phys. Rev. A* 59.1 (1999), pp. 141–155.
- [108] Julio I de Vicente. “On nonlocality as a resource theory and nonlocality measures”. Em: *J. Phys. A: Math. Theor.* 47.424017 (2014), pp. 1–18.
- [109] Rodrigo Gallego e Leandro Aolita. “Nonlocality free wirings and the distinguishability between Bell boxes”. Em: *Phys. Rev. A* 424017 (2017).
- [110] Victoria Lipinska *et al.* “Towards an equivalence between maximal entanglement and maximal quantum nonlocality”. Em: *New J. Phys.* 20.063043 (2018), pp. 1–14.
- [111] J. J. Sakurai e Jim Napolitano. *Mecânica Quântica Moderna*. 2 ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.
- [112] Shmuel Marcovitch e Benni Reznik. “Testing Bell inequalities with weak measurements”. Em: *ArXiv:1005.3236* (2010), pp. 1–5.
- [113] Meng-Jun Hu *et al.* “Experimental Sharing of Nonlocality among Multiple Observers with One Entangled Pair via Optimal Weak Measurements”. Em: *ArXiv:1609.01863v2* (2016), pp. 1–6.
- [114] J. Schwinger. “Unitary operator bases”. Em: *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A* 46 (1960), p. 570.
- [115] G. Manfredi e M. R. Feix. “Entropy and Wigner functions”. Em: *Phys. Rev. E* 62.4 (2000), pp. 4655–4674.